Вячеслав Васильевич Степанов

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Д. у. — дифференциальное уравнение)

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Курс дифференциальных уравнений в объёме нашей университетской программы по необходимости слагается из глав, соответствующих различным отделам научной теории этой ветви математического анализа. Элементарные методы интеграции, теоремы существования, особые решения, общая теория линейных уравнений — эти главы в современном состоянии науки связаны с теорией групп Ли, с применением методов теории функций действительного и комплексного переменного, с методами линейной алгебры и т. п.

Современное понятие о математической строгости, постепенно внедряющейся в курсы анализа, не позволяет строить учебник дифференциальных уравнений с невыясненной точки зрения на взаимную связь отделов — например, элементарных методов интегрирования и теорем существования. Далее, развитие самой теории и современных её приложений требует введения в университетский курс новых отделов, связанных, с одной стороны, с развитием качественных методов, с другой стороны, с теоремами колебания для линейных дифференциальных уравнений.

Настоящий курс построен целиком в области действительного переменного; это обусловливается как положением курса в плане университетского преподавания (он начинается раньше теории аналитических функций), так и указанной выше необходимостью дать курс, объединённый общей идеей. Вопросы существования и единственности решений ставятся уже при изложении элементарных методов интеграции. В связи с общей структурой курса теорема существования решения уравнения первого порядка появляется близко от начала курса. Классические понятия общего решения, интегрирующего множителя, первого интеграла удаётся, по нашему мнению, обосновать достаточно строго и не слишком громоздко, если ограничиться локальной точкой зрения. В связи с этим в курсе даётся (мелким шрифтом) достаточно развёрнутая качественная теория распределения интегральных кривых в окрестности особой точки и оставляется в стороне исследование общего течения интегральных кривых. К сожалению, отмеченная выше строгость основывается на теореме о дифференцируемости решения по параметру; эта теорема ввиду её сложности приведена лишь в мелком шрифте главы VII. С принятой здесь точки зрения особое решение определяется как решение,

в каждой точке которого нарушается единственность; теория особых решений для уравнений степени выше первой относительно производной, конечно, не может быть достаточно систематически изложена в действительной области. В связи с уравнениями второго порядка дано механическое приложение — периодические движения. В теории линейных уравнений даны «нетрадиционные» теоремы — Штурма и теорема сравнения. Краевые задачи не вошли в рассматриваемый курс, их место — при изучении уравнений математической физики, так как постановка задачи с параметром и его собственными значениями непонятна без обращения к первоисточнику — уравнению с частными производными второго порядка. Параграф об интегрировании с помощью степенных рядов, важный для приложений, конечно, не может быть сколько-нибудь полным без обращения к аналитическим функциям; он является в курсе эпизодическим и не содержит, например, уравнений Бесселя и Лежандра, относимых нами к курсу уравнений математической физики. Новым является параграф о применении тригонометрических рядов к линейным уравнениям.

Другие отступления от традиций легко обнаружатся при сравнении настоящего курса с другими руководствами.

Вопросы, не входящие в университетскую программу, но тесно примыкающие к её темам, даны мелким шрифтом.

От изучающего настоящий курс требуется знание университетского курса анализа в достаточно строгом и углублённом изложении, основные сведения из теории определителей, высшей алгебры и дифференциальной геометрии.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В. В. Степанов, автор учебника, скончался 22 июля 1950 года в период подготовки пятого издания. В пятом издании к главе VII добавлен § 6 об устойчивости по Ляпунову; в составлении этого параграфа большое содействие автору по его просьбе оказал С. А. Гальперн. В качестве последней главы был помещён исторический очерк, написанный для этой книги по просьбе автора А. П. Юшкевичем.

Для шестого издания были исправлены лишь замеченные опечатки и частично переработан А. П. Юшкевичем исторический очерк (глава X).

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.
ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Введение.

1. С точки зрения формально-математической задача решения (*интегрирования*) дифференциальных уравнений есть задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления состоит в том, чтобы по заданной функции найти её производную. Простейшая обратная задача уже встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти её примитивную (неопределённый интеграл). Если искомую примитивную функцию обозначить через y, то указанная задача может быть записана в форме уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

или

$$dy = f(x)\,dx. \tag{2}$$

Равносильные между собой уравнения (1) и (2) являются простейшими дифференциальными уравнениями. Мы уже умеем их решать; в самом деле, из интегрального исчисления известно, что наиболее общая функция y, удовлетворяющая уравнению (1), или, что то же, уравнению (2), имеет вид:

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{3}$$

В решении (3) символ неопределённого интеграла обозначает какую-нибудь примитивную, а C есть *произвольное постоянное*. Итак, оказывается, что искомая функция y определяется из уравнения (1) или (2) *неоднозначно*. Наше дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых получится, если произвольному постоянному C придать определённое числовое значение. Решение (3) уравнения (1), содержащее произвольное постоянное, называется *общим решением*; каждое решение, которое получается

из общего, если дать постоянному C определённое числовое значение, называется *частным решением*.

Следующий пример возьмём из механики. Исследуем движение точки m по вертикальной прямой под действием силы земного притяжения. Примем за ось Oy вертикальную прямую, по которой движется (падает) точка; начало поместим на поверхности земли, а положительное направление условимся отсчитывать вверх. Чтобы знать движение, т. е. положение нашей точки в любой момент t после начала движения (соответствующего значению $t=0$), надо знать выражение единственной координаты этой точки y как функции t. Таким образом, у нас независимым переменным является t, а искомой функцией y. Составим уравнение для нахождения y. Из механического смысла второй производной следует, что ускорение равно $\frac{d^2y}{dt^2}$; с другой стороны, мы знаем, что ускорение силы тяжести в каждой точке земной поверхности и вблизи неё постоянно и (приблизительно) равно 981 *см/сек*^{2}, оно обозначается буквой g, $g\approx 981$ *см/сек*^{2}; оно направлено вниз, следовательно, в нашей системе координат ему надо придать знак —. Приравнивая два найденных выражения для ускорения точки, получаем уравнение, в котором известной является функция y:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g. \tag{4}$$

Здесь дано значение второй производной от y, требуется найти функцию. Легко решить («проинтегрировать») это дифференциальное уравнение [1]). Взяв два раза неопределённый интеграл от обеих частей равенства (4) по t, мы получаем последовательно:

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_1, \tag{5}$$

$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2. \tag{6}$$

Выражение (6) есть общее решение уравнения (4); оно содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Выясним физический смысл этих постоянных. Полагая в уравнении (5) $t=0$, получаем:

$$C_1=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=v_0 \text{ (начальная скорость точки);}$$

аналогично из уравнения (6):

$$C_2=(y)_{t=0}=y_0 \text{ (начальное положение точки).}$$

---

[1]) Обыкновенно вместо выражения «решить дифференциальное уравнение» говорят: «*интегрировать дифференциальное уравнение*». Чтобы избежать путаницы, операцию взятия неопределённого интеграла называют «*квадратурой*».

С этими новыми обозначениями произвольных постоянных мы напишем общее решение (6) дифференциального уравнения (4) в виде:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \tag{7}$$

Теперь ясно, какие дополнительные данные нужно иметь, чтобы получить частное решение, описывающее одно вполне определённое движение: нужно знать числовые значения начального положения точки y_0 и начальной скорости v_0 (*начальные условия*).

ЗАДАЧИ.

1. Найти уравнение движения точки, падающей с высоты 10 *м* без начальной скорости. Через сколько секунд точка упадёт на землю?

2. Найти уравнение движения точки, брошенной вверх со скоростью 1 *м/сек*. Через сколько времени точка достигнет наивысшего положения?

3. Найти общие решения уравнений: $\frac{dy}{dx} = 2$; $\frac{dy}{dx} = -x^3$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$.

2. В уравнение (1) входила только первая производная от искомой функции. Это — дифференциальное уравнение *первого порядка*. Самое общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{8}$$

где F — заданная непрерывная функция трёх своих аргументов; в частности, она может не зависеть от x или от y (или от обоих этих аргументов), но непременно должна содержать $\frac{dy}{dx}$. Если уравнение (8) определяет $\frac{dy}{dx}$ как неявную функцию двух остальных аргументов [1]) (в дальнейшем мы всегда будем предполагать это условие выполненным), то его можно представить в виде, разрешённом относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y). \tag{9}$$

Здесь f — непрерывная заданная функция от x, y [в частности, она может не содержать одного или обоих аргументов: в уравнении (1) f не зависит от y; в задаче 3, пример 1, правая часть не зависит

[1]) Чтобы существовала неявная функция $y' = f(x,\ y)$, определяемая уравнением $F(x, y, y') = 0$ и принимающая значение y_0' при $x = x_0$ и $y = y_0$, достаточно, чтобы выполнялось равенство $F(x_0,\ y_0,\ y_0') = 0$, существовала непрерывная частная производная $F'_{y'}$ в окрестности значений x_0, y_0, y_0' и чтобы было $F'_{y'}(x_0,\ y_0,\ y_0') \neq 0$; тогда соотношение (8) определяет непрерывную функцию (9) в окрестности значений x_0, y_0 независимых переменных, причём $f(x_0,\ y_0) = y_0'$.

ни от x, ни от y]. В дифференциальном уравнении (8) или (9) x является независимым переменным, y — искомой функцией. Итак, *дифференциальное уравнение первого порядка есть соотношение, связывающее искомую функцию, независимое переменное и первую производную от искомой функции.*

Решением дифференциального уравнения (8) или (9) называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (8) или (9), обратит его в тождество.

Уравнение (4) содержало вторую производную от искомой функции; это было уравнение *второго порядка*. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка есть

$$F(x, y, y', y'')=0, \tag{10}$$

или, предполагая его разрешённым относительно второй производной (если это разрешение возможно),

$$y''=f(x, y, y'). \tag{10'}$$

(Мы для краткости письма обозначаем производные от y по x штрихами.) Здесь F и f — данные непрерывные функции своих аргументов, x — независимое переменное, y — искомая функция; некоторые из аргументов x, y, y' (или все они) могут не входить в уравнение, но y'' непременно входит. Решением опять называется функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена на место y в уравнение (10) [или (10')], обратит его в тождество.

Вообще *порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей входящей в него производной* от искомой функции. Так, уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0,$$

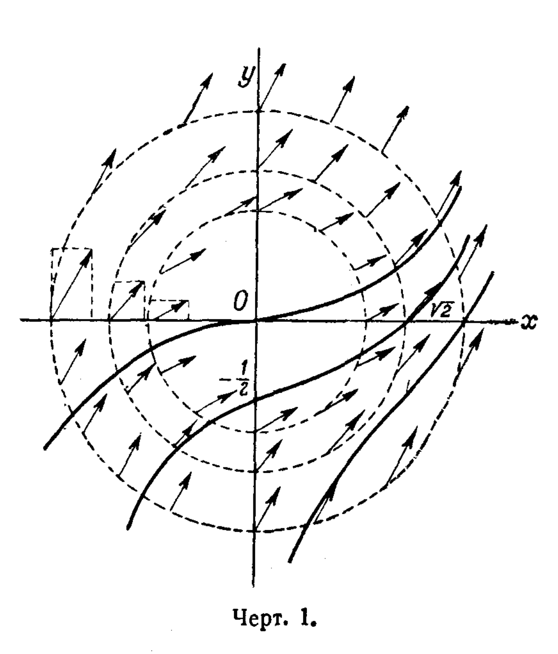
причём $y^{(n)}$ непременно входит в уравнение.

3. Дифференциальному уравнению первого порядка можно дать геометрическое толкование, которое выяснит нам вопрос о характере множественности решений такого уравнения. Пусть дано уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{9}$$

Примем x, y за декартовы прямоугольные координаты плоскости. Каждой точке (x, y) той области, где определена функция f, уравнение (9) ставит в соответствие определённое значение $\frac{dy}{dx}$. Пусть $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (9); тогда кривая, определяемая уравнением $y=\varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Значение $\frac{dy}{dx}$ есть тангенс угла, образуемого касательной к этой кривой с осью Ox. Таким образом, каждой точке (x, y) рассматриваемой области уравнение (9) ставит в соот-

ветствие некоторое направление; мы получаем *поле направлений.* Это поле можно изобразить, поместив в соответствующих точках области стрелки, образующие с осью Ox углы $\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ (положительное направление стрелки можно взять произвольным, так как арктангенс определяет угол лишь с точностью до кратного π). Задача интегрирования дифференциального уравнения может быть теперь истолкована так: найти такую кривую, чтобы её касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Грубо говоря, нужно провести кривую так, чтобы расставленные на поле стрелки показывали в каждой точке направление касательной к искомой кривой.



Черт. 1.

Рассмотрим подробнее следующий пример:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2. \quad (11)$$

Расставим стрелки, найдя предварительно те линии, где наклон одинаков (*изоклины*). Так, если $y'=0$, мы имеем $x=y=0$ (начало координат), если $y'=\frac{1}{2}$, то $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ $\left(\text{круг радиуса } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ с центром в начале}\right)$, $y'=1$ на окружности $x^2+y^2=1$ и т. д. (черт. 1). Чтобы начертить интегральную кривую уравнения (11), надо взять некоторую точку (x_0, y_0) на плоскости и провести через неё кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля $\left[\text{на чертеже проведены кривые через точки } (0,\ 0), \left(0,\ -\frac{1}{2}\right), (\sqrt{2},\ 0)\right]$. Мы видим, что получается не одна кривая, а целое семейство от одного параметра (за параметр можно взять, например, отрезок, отсекаемый кривою на оси Oy). Это же заключение будет при известных ограничениях справедливо и для любого поля, т. е. любого дифференциального уравнения. Таким образом, мы вправе ожидать такого

ответа на вопрос о множестве интегральных кривых дифференциального уравнения: *интегральные кривые дифференциального уравнения первого порядка образуют семейство, зависящее от одного параметра*:

$$y=\varphi(x, C). \tag{12}$$

Замечая, что функция $\varphi(x, C)$ при любом C есть решение дифференциального уравнения, мы можем также ожидать следующего результата.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка даётся формулой (12), *заключающей одно произвольное постоянное*[1]).

Наконец, вспомнив, что мы получаем каждую отдельную интегральную кривую, задавая точку (x_0, y_0), через которую она проходит, мы приходим к следующему заключению:

Чтобы однозначно определить частное решение дифференциального уравнения первого порядка, надо задать то значение y_0, которое искомая функция принимает при заданном значении x_0 независимого переменного (начальные значения).

В самом деле, если x_0 и y_0 даны, то, подставляя их в уравнение (12), мы получим: $y_0=\varphi(x_0, C)$ — одно уравнение для определения одного неизвестного C; наши геометрические соображения позволяют ожидать, что это уравнение имеет решение.

Примечание. Рассуждения настоящего раздела 3 не являются строгими доказательствами существования решения дифференциального уравнения и однозначного определения частного решения начальными данными, так как они ссылаются на геометрическую картину; все приведённые результаты справедливы лишь при определённых ограничениях, наложенных на функцию f; строгие доказательства будут даны в главе II. Наши рассуждения только показывают, каких обстоятельств мы вправе ожидать в простейших случаях, и дают практический приём для приближённого вычерчивания интегральных кривых.

ЗАДАЧА.

4. Построить поле направлений для уравнения $\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$ (построить изоклины $y'=0$, $y'=\pm 1, \pm 2$). Провести интегральные кривые через точки (0, 0), (0, 1), (1, 0).

4. Мы видели, что свойство общего решения дифференциального уравнения первого порядка — зависеть от одного произвольного постоянного, — выявленное на простейшем примере (1), подтверждается соображениями предыдущего раздела и для более общих уравнений первого порядка. Естественно ожидать, что, по аналогии с примером (4), решение общего дифференциального уравнения второго по-

[1]) Точное определение общего и частного решения мы сможем дать лишь в дальнейшем.

рядка (10) или (10′) будет заключать два произвольных постоянных, а общее решение дифференциального уравнения n-го порядка будет зависеть от n произвольных постоянных. Так оно и есть (при известных ограничениях); мы не будем здесь приводить геометрических соображений, а подойдём к вопросу с другой стороны, благодаря чему наши соображения по аналогии получат значительное подтверждение.

Поставим задачу, в некотором смысле обратную задаче интегрирования дифференциального уравнения. Пусть дано соотношение:

$$y = \varphi(x, C), \tag{13}$$

где C есть параметр; дифференцируя по x [1]), получим:

$$y' = \varphi'_x(x, C). \tag{14}$$

Если правая часть выражения (14) не содержит C, то мы уже произвели исключение параметра C и получили дифференциальное уравнение:

$$y' = \varphi'_x(x); \tag{14′}$$

очевидно, что в этом случае соотношение (13) имеет вид:

$$y = \varphi(x) + C$$

и является решением уравнения (14′).

Пусть теперь правая часть равенства (14) содержит C; тогда и правая часть равенства (13) содержит C, т. е. $\varphi'_C(x, C) \not\equiv 0$, и в окрестности значений x_0, C_0, для которых $\varphi'_C(x_0, C_0) \neq 0$, мы можем определить C как функцию от x и y:

$$C = \psi(x, y). \tag{15}$$

Очевидно, что имеет место тождество (по переменным x и C):

$$\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C. \tag{16}$$

Подставляя значение C, определённое формулой (15), в выражение (14), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y)). \tag{17}$$

Легко убедиться в том, что (13) представляет его решение при любом значении C; в самом деле, если мы подставим это выражение для y в уравнение (17), то в левой части получим $\varphi'_x(x, C)$, а в правой $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\}$, а это, в силу тождества (16), тоже даёт $\varphi'_x(x, C)$.

---

[1]) Мы предполагаем, что все входящие в рассуждения производные существуют.

Если соотношение между x, y, C дано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{13'}$$

то, дифференцируя его по x, находим:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0. \tag{14''}$$

Исключая C из соотношений (13′) и (14″), приходим, при выполнении соответствующих условий из теории неявных функций, к уравнению

$$F(x, y, y') = 0. \tag{17'}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что (13′) определяет его решение.

Пусть теперь дано соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{18}$$

связывающее функцию y и независимое переменное x и заключающее n параметров C_1, C_2, ..., C_n. Нельзя ли построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция y, определённая соотношением (18), при любых постоянных значениях параметров? Мы предположим, что Φ непрерывна по всем аргументам и дифференцируема по x и y достаточное число раз. Дифференцируем в указанных предположениях равенство (18) n раз [оно является тождеством, если вместо y подставить функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, определяемую соотношением (18)]. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y' &= 0,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y'' &= 0,\\
\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y} y' + \ldots \quad + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y''' &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y^{(n)} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) образуют систему $n+1$ уравнений; они содержат n параметров C_1, C_2, ..., C_n. Вообще говоря [1]), из этой системы можно исключить все параметры, т. е. найти их выражения через x, y, y', ..., $y^{(n)}$ из n уравнений и вставить эти выражения в $(n+1)$-е уравнение. Мы придём к соотношению вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{20}$$

[1]) Даже для случая линейных уравнений мы знаем, что не всегда из n уравнений можно определить n неизвестных.

т. е. к дифференциальному уравнению n-го порядка. Мы уже отметили, что при подстановке в уравнение (18) на место y его выражения $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ получается тождество, и то же справедливо относительно уравнений (19); поэтому и уравнение (20), являющееся следствием уравнений (18) и (19), обратится в тождество, если в него подставить вместо y функцию $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, а это значит, что y, определяемый из уравнения (18), есть решение уравнения (20). Таким образом, эта функция, содержащая n произвольных постоянных, является решением некоторого дифференциального уравнения n-го порядка. Можно было бы провести и более точное рассуждение, как мы это сделали для уравнения первого порядка. Теперь мы вправе ожидать, что исходное решение является общим и что, обратно, общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных.

ЗАДАЧИ.

5. Найти дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости (взять общую форму); проинтегрировать это уравнение.

6. Найти дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с данным фокусным расстоянием $2c$.

Указание. Уравнение семейства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$, где a — произвольный параметр, дифференцируем по x, считая y функцией x; по сокращении имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{yy'}{a^2 - c^2} = 0.$$

Исключив из этих двух уравнений a^2, получим искомое уравнение первого порядка.

Пример 1. Семейство всех кругов на плоскости

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

содержит три параметра. Дифференцируем три раза:

$$x - \alpha + (y-\beta)y' = 0, \quad 1 + (y-\beta)y'' + y'^2 = 0,$$

$$(y-\beta)y''' + 3y''y' = 0.$$

Параметры α и r исключились при дифференцировании; нам остаётся исключить β из двух последних уравнений, и мы получим (приравнивая два выражения для $y - \beta$):

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

Пример 2. В качестве последнего примера возьмём уравнение всех конических сечений. Из аналитической геометрии известно, что оно зависит от пяти параметров (отношения шести коэффициентов) и имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Предположим, что $a_{22} \neq 0$, и разрешим это уравнение относительно y:

$$y = -\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{a_{22}}},$$

или

$$y = -\frac{a_{12}}{a_{22}}x - \frac{a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2 + 2\frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x + \frac{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}{a_{22}^2}}.$$

Обозначив постоянные новыми буквами, мы получим окончательно:

$$y = Ax + B + \sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}. \qquad (21)$$

В это уравнение входит пять параметров; надо их исключить из данного уравнения и тех уравнений, которые из него получатся после одного, двух, ..., пяти дифференцирований.

Итак, дифференцируем обе части уравнения (21) по x:

$$y' = A + \frac{Cx + D}{\sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}},$$

$$y'' = \frac{C(Cx^2 + 2Dx + E) - (Cx + D)^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}} = \frac{CE - D^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}}.$$

Постоянные A и B исключились; мы имеем в числителе правой части постоянные, в знаменателе — квадратный трёхчлен в степени $\frac{3}{2}$. Для дальнейшего исключения постоянных выгодно возвести обе части в степень $-\frac{2}{3}$; тогда мы получим:

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (CE - D^2)^{-\frac{2}{3}}(Cx^2 + 2Dx + E),$$

т. е. в правой части квадратный трёхчлен относительно x; если его продифференцировать три раза, то все постоянные исключатся, так как в правой части получится 0. Итак, искомое дифференциальное уравнение сразу запишется в виде:

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Проведём это дифференцирование последовательно

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''', \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2 - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\text{IV}}$$

и, наконец,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3 + \frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\text{IV}} + \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\text{IV}} - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\text{V}} = 0.$$

Упростим последнее уравнение, приведя подобные члены и умножив

обе части на $y''^{\frac{11}{3}}$, чтобы не иметь отрицательных степеней; далее, умножим все члены на числовой множитель $-\frac{27}{2}$. Мы получим окончательно:

$$9y''^2y^{V}-45y''y'''y^{IV}+40y'''^3=0.$$

Примечание 1. Мы взяли в формуле (21) перед радикалом знак $+$; легко проверить, что тот же окончательный результат получится, если взять знак $-$.

Примечание 2. Заметим, что $C=\frac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}$; в случае параболы мы имеем $C=0$, и уравнение парабол (зависящее от четырёх параметров) имеет вид:

$$y=Ax+B+\sqrt{2Dx+E}.$$

Примечание 3. Мы предположили $a_{22}\neq 0$; разбор случая $a_{22}=0$ отнесён к задачам.

ЗАДАЧИ.

7. Вывести дифференциальное уравнение конических сечений, у которых $a_{22}=0$. Каково геометрическое свойство этих кривых, выделяющее их из всех кривых второго порядка? (Рассмотреть два случая: $a_{12}\neq 0$, $a_{12}=0$.)

8. Вывести дифференциальное уравнение парабол, для которых $a_{22}\neq 0$, и тех парабол, для которых $a_{22}=0$.

Примечание. Если мы имели соотношение между x и y, содержащее n параметров, то мы утверждали, что, «вообще говоря», для исключения этих параметров надо иметь $n+1$ уравнений. В отдельных случаях параметры могут исключиться из меньшего числа уравнений; например, из семейства $y=C_1(C_2x+C_3)$ получается после исключения параметров уравнение второго порядка $y''=0$, так как на самом деле это семейство зависит от двух параметров C_1C_2 и C_1C_3.

Труднее обнаружить этот факт на уравнении $y^2=2bxy+cx^2$, представляющем семейство распадающихся кривых второго порядка с двойной точкой в начале координат. Как геометрический образ, это семейство действительно зависит от двух параметров; но если разрешить уравнение относительно y, мы получим:

$$y=(b\pm\sqrt{b^2+c})\,x;$$

с функциональной точки зрения y, рассматриваемый как однозначная функция от x, зависит от x и одной комбинации параметров:

$$k=b\pm\sqrt{b^2+c}.$$

И действительно, дифференцируя данное соотношение, находим:

$$yy'=b(xy'+y)+cx;$$

исключая c из этого уравнения и из данного, получим:

$$xyy'-y^2=b(x^2y'-xy)\quad\text{или}\quad (y-bx)(xy'-y)=0.$$

Второй множитель, приравненный нулю, даёт искомое дифференциальное уравнение $xy'-y=0$; легко видеть, что, приравняв нулю первый множитель, мы получим частное решение того же дифференциального уравнения.

§ 2. Метод разделения переменных.

1. Мы уже встретились в § 1 с простейшим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

Мы можем также записать его при помощи дифференциалов:

$$dy=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Уравнение вида (1) [или (2)] мы назовём *дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим* (явно) *искомой функции*. Мы предполагаем, что функция $f(x)$ определена в некотором интервале $a<x<b$ и непрерывна во всякой внутренней точке этого интервала. В частности, может быть $a=-\infty$ или $b=\infty$, или одновременно $a=-\infty$, $b=\infty$.

В интегральном исчислении доказывается, что искомая функция $y(x)$, как примитивная по отношению к функции $f(x)$, даётся неопределённым интегралом (или определённым интегралом с переменным верхним пределом); доказывается также, что любая примитивная отличается от какой-нибудь определённой примитивной только на постоянное слагаемое. Таким образом, решение уравнения (1) [или (2)] есть

$$y=\int f(x)\,dx+C. \tag{3}$$

C есть произвольное постоянное, оно может принимать все значения, $-\infty<C<+\infty$; давая ему всевозможные численные значения, мы получим, согласно сказанному, все функции y, удовлетворяющие данному уравнению. Таким образом, выражение (3) представляет *общее решение* уравнения (1). Задаваясь определённым численным значением C, мы получаем *частное решение*. Все частные решения являются непрерывными и дифференцируемыми функциями от x во всём интервале $a<x<b$.

Для выяснения смысла произвольной постоянной в формуле (3) целесообразно написать неопределённый интеграл в виде определённого с переменным верхним пределом:

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C, \tag{3$_1$}$$

где x_0 — любая внутренняя точка интервала (a, b). Если дать переменному x значение x_0, то мы получим:

$$y(x_0)=C.$$

Обозначая через y_0 значение искомой функции при $x=x_0$, получаем вместо формулы (3_1):

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{3$_2$}$$

Таким образом, частное решение вполне определится, если задать начальное значение искомой функции, т. е. то значение, которое она должна принимать при некотором определённом (начальном) значении x_0 независимого переменного.

Итак, *начальные данные* (x_0, y_0) *определяют единственное решение уравнения* (1) *во всём интервале непрерывности правой части* $f(x)$. С геометрической точки зрения задание начальных значений есть задание некоторой точки плоскости xOy. Мы можем дать такое истолкование полученному результату: *через каждую точку полосы* $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$ *плоскости* xOy *проходит единственная интегральная кривая уравнения* (1). Наконец, заметим, что формулы (3_1), (3_2) показывают, что любая интегральная кривая может быть получена из одной определённой, например из $y=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, путём переноса параллельно оси y на (положительный или отрицательный) отрезок $C=y_0$.

Пример 3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$. Правая часть непрерывна в открытых интервалах $(0,\infty)$ и $(-\infty, 0)$. Для первого интервала имеем (при $x_0>0$)

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0;$$

это решение определено для всех x в интервале $0<x<\infty$. Для второго интервала при начальном значении $x_0<0$ получаем:

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln|x|-\ln|x_0|+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0$$

— решение, определённое для значений $-\infty<x<0$.

Пример 4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x=0$. Разрешая относительно производной, получим два уравнения:

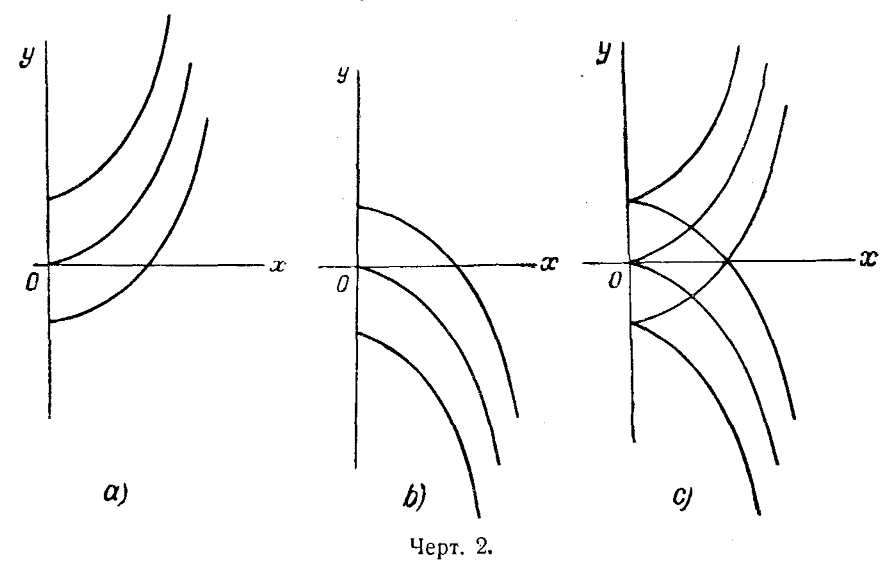
$$\frac{dy}{dx}=+\sqrt{x},\quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{x},\quad 0\leqslant x<\infty.$$

Интегрируем эти уравнения: $y=+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$, $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Первое уравнение определяет семейство (от одного параметра) восходящих ветвей полукубической параболы, получаемых из одной, например $y=+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, переносом параллельно оси y (черт. 2, a); аналогично второе уравнение определяет семейство нисходящих

ветвей (черт. 2, b). Очевидно, что через каждую точку полуплоскости $x \geqslant 0$, $-\infty < y < +\infty$ проходит одна и только одна интегральная кривая каждого уравнения.

Если бы мы интегрировали заданное уравнение, не разбивая его на два уравнения с однозначными правыми частями, мы получили бы семейство полных полукубических парабол; но тогда через каждую точку рассматриваемой области проходило бы по две интегральные кривые (черт. 2, c).

В очень многих случаях при заданной функции $f(x)$ мы не сумеем выразить входящий в решение (3) интеграл через элементарные функции. Тем не менее, мы будем считать, что задача интегрирования



Черт. 2.

уравнения (1) решена — «решение выражено в квадратурах». Эту «формальную» точку зрения мы будем проводить в значительной части настоящего курса — мы *будем считать, что умеем решать дифференциальное уравнение, если сумеем выразить общее решение при помощи квадратур*. Точно так же, *если решение получается в виде соотношения, определяющего y как неявную функцию x, мы будем считать решение известным, хотя бы и не умели в элементарных функциях явно выразить зависимость y от x*. Эта точка зрения, считающая задачу решённой, если она сведена к задаче одного из предшествующих отделов математики, хотя бы там не существовало элементарного решения соответствующей задачи, имеет, кроме чисто формального характера, и практическое обоснование: если не удаётся найти общего решения дифференциального уравнения, выраженного в знакомых нам элементарных функциях, то

приходится применять методы приближённого интегрирования этих уравнений. И оказывается, что приближённое нахождение квадратуры и приближённое решение конечного (т. е. не содержащего дифференциалов) уравнения, хотя бы не алгебраического, а трансцендентного, являются более лёгкими задачами, чем приближённое решение дифференциального уравнения.

2. Переходим ко второму типу уравнений первого порядка, тоже интегрируемых в квадратурах:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{22}$$

или

$$dy = f(y)\,dx. \tag{22_1}$$

Говорят, что это *уравнение первого порядка, не содержащее* (явно) *независимого переменного*.

Мы опять предполагаем функцию $f(y)$ непрерывной в интервале $a < y < b$, где $a \geqslant -\infty$, $b \leqslant +\infty$. Для нахождения искомой функции $y = \varphi(x)$ допускаем, что для неё существует обратная функция $x = \psi(y)$ (мы, далее, докажем законность этого допущения). Принимая, таким образом, y за независимое переменное, а x — за искомую функцию, мы по свойству производной от обратной функции имеем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{22_2}$$

Мы привели уравнение к уже рассмотренному типу. Но функция в правой части перестаёт быть непрерывной для тех значений y, которые обращают знаменатель в нуль. Поэтому ограничимся сначала рассмотрением интервала $\alpha < y < \beta$, внутри которого $f(y)$ не обращается в нуль. Выписав уравнение (22_2) в виде:

$$dx = \frac{dy}{f(y)},$$

мы имеем внутри указанного интервала:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{23}$$

Вводя начальные значения x_0, y_0 ($-\infty < x_0 < +\infty$, $\alpha < y_0 < \beta$), мы решение (23) можем переписать в виде:

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}. \tag{23_1}$$

Формулы (23) или (23_1) определяют x как функцию от y; теперь легко убедиться, что эта функция допускает обратную. В самом деле, в интервале (α, β) непрерывная функция $f(y)$ не обращается в нуль,

следовательно, сохраняет постоянный знак; тогда из формулы (23_1) видно, что $x-x_0$ есть монотонная функция от y, а непрерывная монотонная функция (не постоянная ни в каком интервале) всегда имеет (непрерывную и однозначную) обратную функцию. Итак, сделанное нами допущение оправдано.

Очевидно, что эта обратная функция $y=\varphi(x-x_0)$ удовлетворяет исходному уравнению (22). В силу доказанного для уравнений, не содержащих явно искомой функции, мы заключаем, что через каждую точку полосы $-\infty<x<+\infty$, $\alpha<y<\beta$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Примечание. Если решение задаётся конечным уравнением, определяющим y как неявную функцию x, то такое уравнение называется *интегралом дифференциального уравнения.* Итак, соотношение (23) есть интеграл уравнения (22) или (22_2). Интеграл, как и решение, может быть общим и частным. Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка может быть записан в виде:

$$F(x, y, C)=0,$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь значения y, обращающие в нуль правую часть уравнения (22). Пусть уравнение

$$f(y)=0 \tag{24}$$

имеет корень y_0.

Мы непосредственно убеждаемся, что, подставляя $y=y_0$ в обе части уравнения (22), мы обращаем его в тождество. Следовательно, кроме решений, даваемых формулами (23) или (23_1), имеются ещё решения вида $y=y_0$ (интегральные кривые здесь суть прямые, параллельные оси Ox), где y_0 — любое значение, удовлетворяющее уравнению (24).

Через точки этих прямых $x=x_0$, $y=y_0$ иногда проходит только одна интегральная кривая — сама прямая $y=y_0$, иногда также и отличные от этой прямой интегральные кривые, — в последнем случае говорят, что в точке (x_0, y_0) нарушается свойство единственности. Анализ этого вопроса мы проведём в главе III.

Пример 5. $\frac{dy}{dx}=y^2$. Имеем $dx=\frac{dy}{y^2}$; далее, по формуле (23_1)

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2}+x_0, \quad x-x_0=-\frac{1}{y}+\frac{1}{y_0},$$

$$y=\frac{1}{\frac{1}{y_0}-x+x_0}.$$

Это — общее решение; кроме того, существует частное решение $y=0$. Его можно получить при $y_0=0$ из преобразованной формулы

общего решения: $y=\frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$, но легко видеть, что при $y_0=0$ промежуточные выкладки незаконны. Если применять формулу (23), то получим: $x=-\frac{1}{y}+C$, $y=-\frac{1}{x+C}$. Частное решение $y=0$ не получается из этого общего решения ни при каком значении C; можно было бы заметить, что это решение получается в пределе при $C\to\infty$; но C, как постоянная интеграции, есть определенное число; следовательно, и в этой форме решение $y=0$ не получается из формулы (23), дающей общее решение.

3. Уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y), \tag{25}$$

в которых правая часть есть произведение функции только от x на функцию только от y, интегрируются следующим образом: мы «разделяем переменные», т. е. при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал x, а в другую часть — функция от y и dy. В данном случае надо умножить обе части уравнения на dx и разделить на $\varphi(y)$; мы получим:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)\,dx. \tag{25_1}$$

Переменные разделены. Теперь рассуждаем так: вообразим, что нам известен y как функция x, являющаяся решением уравнения (25); тогда в обеих частях уравнения (25_1) стоят тождественно равные между собой дифференциалы; только в правой части этот дифференциал выражен непосредственно через независимое переменное x, а в левой части — через посредство y, являющегося функцией от x. Если дифференциалы равны, то их неопределённые интегралы могут различаться только постоянным слагаемым; мы можем интегрировать левую часть по y, а правую по x. Получим:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx+C, \tag{26}$$

где C — произвольная постоянная.

Итак, в предположении, что y есть решение уравнения (25), мы получили соотношение (26), связывающее это решение y и независимое переменное x, т. е. получили общий интеграл уравнения (25). Если удаётся разрешить его относительно y, то получим (в явном виде) общее решение данного уравнения.

Посмотрим, при каких условиях формула (26) действительно определяет y как функцию (однозначную) от x в окрестности

точки $x=x_0$, $y=y_0$. Напишем интеграл в виде:

$$0=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}-\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx\equiv\Psi(x,\, y;\, x_0,\, y_0)\ [1]).$$

Очевидно, $\Psi(x_0, y_0; x_0, y_0)=0$. Далее

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\frac{1}{\varphi(y_0)}.$$

Это выражение не обращается в 0; оно имеет смысл, если $\varphi(y_0)\neq 0$, — мы получили то же условие, что в разделе 2. Если для некоторого значения $y=y_0$ мы имеем $\varphi(y_0)=0$, то решением уравнения (25), кроме решений, данных формулой (26), будет также $y=y_0$.

Если уравнение задано в виде:

$$M(x)N(y)\,dx+P(x)\,Q(y)\,dy=0, \tag{27}$$

то для разделения переменных не нужно приводить его к виду (25), а достаточно разделить обе части на произведение тех множителей, которые содержат не то переменное, на дифференциал которого они умножаются, именно на $N(y)P(x)$. Разделяем переменные:

$$\frac{M(x)\,dx}{P(x)}+\frac{Q(y)\,dy}{N(y)}=0,$$

откуда получится общий интеграл:

$$\int\frac{M(x)\,dx}{P(x)}+\int\frac{Q(y)\,dy}{N(y)}=C.$$

Примечание. К этому виду уравнения применимо то же указание относительно значений, обращающих в нуль $N(y)$, что и в конце п. 2 (стр. 22); кроме того, функции $x=x_0$, соответствующие значениям x_0, обращающим в 0 функцию $P(x)$, удовлетворяют уравнению, заданному в дифференциальной форме (27), так как $dx_0=0$, $P(x_0)=0$. Если в уравнении (27) считать x и y равноправными, то прямые $x=x_0$ тоже следует причислить к решениям; если же строго придерживаться условия, что y есть искомая функция, а x — независимое переменное, то, конечно, равенство $x=x_0$ не даёт решения. В геометрических вопросах выгоднее считать x и y равноправными, т. е. при случае считать за независимое переменное то x, то y; в исследованиях теоретико-функционального характера (доказательство существования — см. в главе II), наоборот, всегда надо рассматривать y как функцию от x.

[1]) Знаком тождества мы пользуемся для введения нового обозначения рассматриваемой функции.

Пример 6. $x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0$. Разделяем переменные, для чего делим обе части уравнения на $(y^2-1)(x^2-1)$; получаем:

$$\frac{x\,dx}{x^2-1}+\frac{y\,dy}{y^2-1}=0.$$

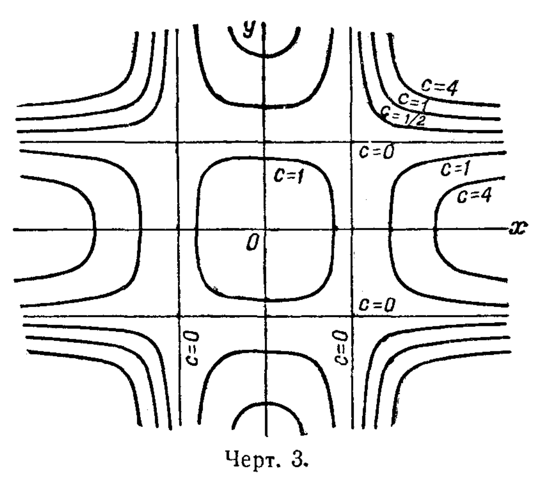
Интегрируем сумму двух дифференциалов:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|,$$

или, потенцируя,

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

(для простоты записи окончательного результата нам было удобно написать постоянную интеграции в виде $\ln|C|$). Общий вид семейства кривых, представляемого общим интегралом, показан на черт. 3. В частности, при $C=0$ получим 4 прямые: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, о которых шла речь в последнем примечании (значения $x=\pm 1$ и $y=\pm 1$ обращают в 0 знаменатели после разделения переменных); они не могли получиться из квадратуры, так как в ней получилась постоянная интеграции $\ln|C|$, так что $C\neq 0$.



Черт. 3.

Рассмотрим теперь один пример на составление дифференциального уравнения.

Пример 7. Истечение жидкости из сосуда. В гидравлике выводится закон, по которому скорость v истечения воды из отверстия, находящегося на глубине h от свободной поверхности, даётся формулой:

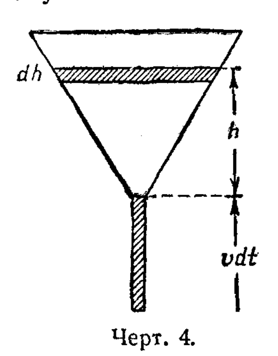
$$v=0{,}6\sqrt{2gh}\ \textit{см/сек},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Пусть мы имеем коническую воронку, наполненную водой, высотой 10 *см*, с углом при вершине $\alpha=60°$; внизу находится отверстие площадью 0,5 *см*^{2} (черт. 4). Найти закон вытекания воды.

Искомая функция — высота воды h в любой момент времени t. Скорость истечения v всё время меняется вместе с h; но если взять бесконечно малый промежуток времени dt, то её можно считать

постоянной (мы отбрасываем бесконечно малое высшего порядка, отношение которого к dt стремится к нулю при $dt \to 0$). Подсчитаем двумя способами объём воды, вытекающей в промежуток времени от t до $t+dt$. С одной стороны, через отверстие вытечет объём, занимающий цилиндр с основанием 0,5 *см*² и высотой $v\,dt$; таким образом, искомый объём есть



Черт. 4.

$$-dV = -0{,}5v\,dt = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt.$$

С другой стороны, вследствие утечки воды высота h получит отрицательное приращение dh, дифференциал объёма вытекшей воды выразится так:

$$-dV = \pi r^2\,dh = \pi\,(h\operatorname{tg}30^\circ)^2\,dh = \frac{\pi}{3}h^2\,dh.$$

Приравнивая оба найденных выражения для $-dV$, получим дифференциальное уравнение, связывающее h и t:

$$\frac{\pi}{3}h^2\,dh = -0{,}3\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Это уравнение не содержит явно независимого переменного t, т. е. оно принадлежит ко второму типу; переменные разделяются:

$$dt = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,h^{\frac{3}{2}}\,dh,$$

$$t = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,\frac{2}{5}\,h^{\frac{5}{2}} + C \approx -0{,}0314\,h^{\frac{5}{2}} + C.$$

Произвольное постоянное C определится из начальных условий: при $t=0$ имеем $h=10$, отсюда $C \approx 0{,}0314\cdot 10^{\frac{5}{2}}$, и искомое частное решение будет (разрешённое относительно t):

$$t \approx 0{,}0314\,(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}).$$

Если требуется узнать время t_1, в течение которого вытечет вся вода, то надо положить $h=0$; получим:

$$t_1 = 10^{\frac{5}{2}}\cdot 0{,}0314 \approx 10 \text{ сек.}$$

ЗАДАЧИ.

9. Исследовать закон истечения воды из полусферического сосуда высотой 1 *м*, с отверстием внизу площадью 1 *см*².

10. То же для цилиндрического резервуара с горизонтальной осью диаметра 1,5 *м*, длины 2 *м*; отверстие внизу имеет площадь 10 *см*².

11. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству R радия. Найти зависимость R от t; составить дифференциальное уравнение и определить коэффициент пропорциональности из опытных данных, утверждающих, что через 1600 лет останется половина начального количества радия.

12. Определить кривые, для которых площадь, ограниченная осью абсцисс, дугою кривой от пересечения с осью абсцисс до переменной ординаты и этою последней, пропорциональна n-й степени длины ординаты $(n > 1)$. Каков геометрический смысл произвольной постоянной?

13. Найти кривые, у которых отрезок касательной от точки прикосновения до пересечения с осью x равен постоянной величине a.

14. Найти кривые, у которых отрезок нормали от точки кривой до оси x есть постоянная величина a.

Проинтегрировать уравнения:

15. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=0$. Начальные условия: $x=0$, $y=1$.

16. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0$.

17. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.

§ 3. Однородные уравнения.

Основным методом настоящей главы является разделение переменных; мы изучим несколько типов уравнений, которые искусственными приёмами можно привести к уравнениям с разделяющимися переменными. Первым из этих типов будут однородные уравнения.

1. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

называется *однородным*, если $f(x, y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, т. е. имеет место тождество:

$$f(tx, ty)=f(x, y)\,^{1)}. \tag{28}$$

Полагая в (28) $t=\frac{1}{x}$, получаем тождество:

$$f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Замечая, что в правой части стоит функция только одного аргумента $\frac{y}{x}$, и обозначая её через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, мы видим, что однородное уравнение всегда можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29}$$

---

[1]) По определению, $f(x, y)$ есть однородная функция n-го измерения, если выполняется тождество:

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y);$$

при $n=0$ имеем:

$$f(tx, ty)=t^0 f(x, y)=f(x, y).$$

При произвольно заданной непрерывной функции φ переменные не разделяются. Но так как в правую часть переменные входят только в комбинации $\frac{y}{x}$, то можно ожидать, что уравнение упростится, если ввести новую искомую функцию

$$u=\frac{y}{x},$$

откуда

$$y=ux. \tag{30}$$

Вставляя выражение $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ в уравнение (29), получаем:

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u), \text{ или } x\,du=[\varphi(u)-u]\,dx. \tag{30_1}$$

Переменные разделятся, если обе части разделить на $x[\varphi(u)-u]$; получим:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+C. \tag{31}$$

Если в этом выражении заменить u его значением $\frac{y}{x}$, то получим интеграл уравнения (29).

Примечание. При фактическом интегрировании однородного уравнения не обязательно приводить его к виду (29); достаточно убедиться в том, что уравнение принадлежит к рассматриваемому типу, и непосредственно применить подстановку (30); пользоваться готовой формулой (31) тоже нецелесообразно.

Если $\varphi(u)-u\equiv 0$, то уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ и интегрируется разделением переменных (его общее решение: $y=Cx$). Если $\varphi(u)-u$ обращается в 0 при значении $u=u_0$, то кроме решений, даваемых формулой (31), существует также решение $u=u_0$ или $y=u_0x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Пример 8. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$. Уравнение однородное. Делаем подстановку: $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$; уравнение примет вид:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u(u^2+1)}\,du=0.$$

Разлагаем второе слагаемое на простые дроби и интегрируем обе части:

$$\ln x + \ln(u^2+1) - \ln u = \ln C, \text{ или } \frac{x(u^2+1)}{u} = C.$$

Подставляя значение $u = \frac{y}{x}$ и освобождаясь от знаменателя, находим: $x^2+y^2 = Cy$ — семейство кругов, касающихся оси Ox в начале координат. Кроме того, решением является $y = 0$ [1]).

Примечание. Иногда уравнение можно привести к однородному заменой переменного $y = z^\alpha$ (α — постоянное). Это имеет место в том случае, когда в уравнении все члены оказываются одинакового измерения, если переменному x приписать измерение 1, переменному y — измерение α и производной $\frac{dy}{dx}$ — измерение $\alpha - 1$.

Пример 9. $9y\frac{dy}{dx} - 18xy + 4x^3 = 0$. Уравнение станет однородным, если положить $y = z^2$. Производя эту подстановку, получаем однородное уравнение:

$$9z^3\frac{dz}{dx} - 9xz^2 + 2x^3 = 0.$$

Обычная подстановка $z = ux$ даёт:

$$9u^3(u\,dx + x\,du) - 9u^2\,dx + 2\,dx = 0,$$

или

$$\frac{9u^3\,du}{9u^4 - 9u^2 + 2} + \frac{dx}{x} = 0;$$

ещё раз производим замену переменных $u^2 = v$; имеем:

$$\frac{9v\,dv}{9v^2 - 9v + 2} + \frac{2\,dx}{x} = 0, \text{ или } \frac{6\,dv}{3v-2} - \frac{3\,dv}{3v-1} + \frac{2\,dx}{x} = 0,$$

откуда $\frac{(3v-2)^2x^2}{3v-1} = C$, или, возвращаясь постепенно к начальным переменным,

$$\frac{(3u^2-2)^2x^2}{3u^2-1} = C, \quad \frac{(3z^2-2x^2)^2}{3z^2-x^2} = C, \quad \frac{(3y-2x^2)^2}{3y-x^2} = C.$$

---

[1]) Заметим, что в точках геометрического места $x^2 - y^2 = 0$ правая часть данного уравнения имеет разрыв; поскольку нас интересует геометрическая задача — расположение на плоскости интегральных кривых, мы можем в этих точках рассматривать уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$, у которого правая часть обращается в 0 на паре прямых $x^2-y^2=0$. Таким образом, мы вправе считать, что данное уравнение определяет поле направлений и на этих прямых; направление касательных в точках этих прямых параллельно оси Oy. Поле направлений является неопределённым лишь в точке $x = 0$, $y = 0$.

Задачи.

Проинтегрировать уравнения:

18. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

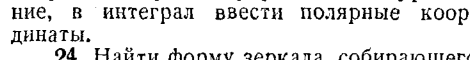
19. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$.

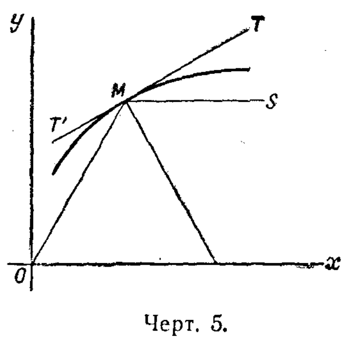
20. $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

21. $(y+x)\,dy=(y-x)\,dx$; начертить интегральные кривые.

22. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$.

23. Составить (в декартовых координатах) уравнение кривых, касательная к которым образует постоянный угол α с радиус-вектором из начала


координат; проинтегрировать это уравнение, в интеграл ввести полярные координаты.



Черт. 5.

24. Найти форму зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку.

Указание. Пусть лучи падают параллельно оси Ox справа (черт. 5); из соображений симметрии легко убедиться, что форма поверхности зеркала есть поверхность вращения. Примем плоскость xOy за меридианную плоскость этой поверхности; в сечении находится искомая кривая $y=f(x)$; дифференциальное уравнение получится, если приравняем тангенсы углов SMT и $T'MO$, выраженные через x, y, y' (угол падения равен углу отражения).

2. **Уравнения, приводимые к однородным.** Рассмотрим сначала уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{32}$$

(a, b, ..., c_1 — данные постоянные).

Если $c=c_1=0$, то уравнение является однородным, и мы умеем его интегрировать. В общем случае постараемся свести это уравнение к однородному. Вводим новые переменные:

$$x=\xi+h,\quad y=\eta+k,$$

где h и k — пока ещё неопределённые постоянные; мы имеем:

$$dx=d\xi,\qquad dy=d\eta;$$

подставляем в уравнение (32):

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}.$$

Если теперь выбрать h и k как решения системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c&=0,\\ a_1h+b_1k+c_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

то мы получим однородное уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}.$$

В его интеграле надо заменить ξ через $x-h$, η через $y-k$, где h и k имеют вышеуказанные значения, и мы получим интеграл уравнения (32).

Система (33) не имеет решения, если определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю: $ab_1-a_1b=0$. Тогда изложенный здесь метод неприменим. Но, замечая, что в этом случае $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ и, следовательно, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}, \tag{34}$$

мы легко приведём его к виду с разделяющимися переменными, если введём новое переменное

$$z=ax+by;$$

тогда $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, и уравнение (34) примет вид:

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1},$$

т. е. мы получаем уравнение, не содержащее явно x,— переменные разделяются.

ЗАДАЧА.

25. Проинтегрировать это уравнение до конца с буквенными коэффициентами.

Изложенный метод можно интерпретировать геометрически: в случае однородного уравнения числитель и знаменатель правой части уравнения (32), приравненные нулю, представляют две прямые, проходящие через начало координат; в общем случае эти прямые через начало координат не проходят. Подстановка состоит в том, что мы переносим начало координат в точку их пересечения; особый случай (34) соответствует параллельности этих прямых.

Примечание. Тот же метод, очевидно, применяется к значительно более общему классу уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

где f — некоторая непрерывная функция своего аргумента.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

26. $3y-7x+7=(3x-7y-3)\frac{dy}{dx}$.

27. $(x+2y+1)\frac{dy}{dx}=2x+4y+3.$

28. $\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

29. $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2.$

3. Геометрические свойства семейства интегральных кривых. Рассмотрим уравнение, не содержащее явно y:

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

Если в нём сделать замену переменного:

$$x_1=x, \quad y_1=y+C \tag{35}$$

(C — постоянное), то, так как $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, уравнение перейдёт само в себя. Следовательно, если $F(x, y)=0$ есть частный интеграл уравнения (1), то $F(x_1, y_1)=0$, или

$$F(x, y+C)=0 \tag{36}$$

тоже будет интегралом при любом C.

Легко видеть, что, обратно, если общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид (36), то исключение произвольного постоянного приведёт к уравнению вида (1). Преобразование (35) состоит геометрически в том, что все точки плоскости (x, y) переносятся на равную величину C параллельно оси y (*перенос*). Дифференциальное уравнение (1) допускает преобразование (35), т. е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным [так как линии $x=x_0$, параллельные оси Oy, являются изоклинами; в самом деле, угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$ на такой прямой имеет постоянное значение $f(x_0)$]. Ясно, что и семейство интегральных кривых переходит при переносе (35) само в себя, причём, однако, каждая отдельная кривая $F(x, y, C')=0$ переходит в другую кривую:

$$F(x, y, C'+C)=0\,[1].$$

[1]) Преобразования переноса образуют *группу преобразований*: совокупность преобразований образует группу, если результат двух последовательных преобразований данной совокупности представляет преобразование этой же совокупности. В нашем случае пусть первое преобразование будет $x_1=x$, $y_1=y+C_1$, второе преобразование $x_2=x_1$, $y_2=y_1+C_2$; их результат $x_2=x$, $y_2=y+C_1+C_2$ есть опять перенос на величину C_1+C_2. Указанный нами в отношении уравнения (1) факт можно сформулировать в общем случае так: если дифференциальное уравнение допускает группу преобразований, то семейство интегральных кривых допускает ту же группу. Преобразования переноса являются примером непрерывной однопараметрической группы преобразований.

Аналогично обстоит дело с уравнением типа

$$\frac{dy}{dx}=f(y). \tag{22}$$

Это уравнение допускает группу преобразований:

$$x_1=x+C, \quad y_1=y$$

(группа переносов параллельно оси x); ту же группу допускает семейство интегральных кривых; общий интеграл получается из частного заменой x на $x+C$.

Рассмотрим с этой точки зрения однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29}$$

Оно допускает группу преобразований $x_1=Cx$, $y_1=Cy$, так как, очевидно, $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x}$. Это — *преобразования подобия* (гомотетия) с центром подобия в начале координат; таким образом, все направления касательных поля одинаковы на каждой прямой, проходящей через начало; эти прямые являются изоклинами. Очевидно, что если частным интегралом уравнения (29) является $F(x, y)=0$, то $F(Cx, Cy)=0$ тоже будет интегралом (общим). Семейство интегральных кривых состоит из подобных и подобно расположенных кривых.

Далее, мы можем с новой точки зрения подойти к уже полученному методу интегрирования уравнения (29). Если за новые переменные взять $u=\frac{y}{x}$ и x, то группа преобразований напишется так:

$$u_1=u,$$
$$x_1=Cx,$$

или, наконец, вводя ещё переменное $\xi=\ln x$,

$$u_1=u,$$
$$\xi_1=\xi+C'$$

(мы положили $\ln C=C'$).

Мы получили в переменных u, ξ группу переносов (35), а это означает, что в новых переменных уравнение будет иметь вид:

$$\frac{d\xi}{du}=f(u);$$

оно не содержит явно ξ.

Так как нашей задачей в п. 1 было только разделить переменные, то замена $\xi=\ln x$ нам не понадобилась; мы в переменных x, u

привели однородное уравнение к виду:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du}=\psi(u)$$

с разделяющимися переменными.

Уравнения, приводимые к однородным, рассмотренные в п. 2, тоже допускают группу преобразований подобия, и центр подобия находится в точке пересечения прямых $ax+by+c=0$, a_1x+b_1y+ $+c_1=0$. И во многих других случаях знание непрерывной группы, допускаемой дифференциальным уравнением, позволяет привести это уравнение к квадратурам.

§ 4. Линейные уравнения.

1. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно искомой функции и её производной. Оно имеет вид:

$$A\frac{dy}{dx}+By+C=0,$$

где коэффициенты A, B, C — заданные непрерывные функции от x. Предполагая, что в некотором интервале изменения x коэффициент A не обращается в нуль, мы можем разделить все члены уравнения на этот коэффициент. Обыкновенно линейное уравнение пишут в виде:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{37}$$

(P, Q — заданные функции от x). Если, в частности, $Q\equiv 0$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}+Py=0. \tag{38}$$

Уравнение (38) называется *линейным однородным* (или без правой части), уравнение (37) — *неоднородным*. Однородное линейное уравнение (38) легко интегрируется разделением переменных и одной квадратурой:

$$\frac{dy}{y}=-P\,dx,\quad \ln|y|=-\int P\,dx+\ln|C|;$$

его общее решение [1] —

$$y=Ce^{-\int P\,dx}. \tag{39}$$

---

[1]) Заметим, что частное решение $y=0$, соответствующее нулевому значению постоянного C, не получается из квадратуры.

Чтобы найти общее решение уравнения (37), в котором P обозначает ту же функцию, что и в уравнении (38), мы применим приём, называемый *вариацией постоянного*. Мы будем пытаться удовлетворить неоднородному уравнению (37) решением того же вида (39), но будем в этой формуле считать C не постоянным, а неизвестной функцией от x. Подставляя в этом предположении правую часть выражения (39) в уравнение (37), получаем:

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int P\,dx} - CPe^{-\int P\,dx} + CPe^{-\int P\,dx} = Q,$$

или

$$\frac{dC}{dx} = Qe^{\int P\,dx}.$$

C найдётся из этого уравнения квадратурой:

$$C = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C_1$$

(C_1 — произвольное постоянное).

Подставляя найденное значение C в выражение (39), получаем общее решение неоднородного линейного уравнения (37):

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C_1 + \int Qe^{\int P\,dx}\,dx\right). \tag{40}$$

Итак, *общее решение линейного уравнения первого порядка находится двумя квадратурами.*

Заметим, что решение (40) представляет сумму двух слагаемых: $C_1 e^{-\int P\,dx}$ есть общее решение однородного уравнения (38), соответствующего данному уравнению (37), т. е. получаемого из данного заменой правой части нулём; второе слагаемое, $e^{-\int P\,dx}\int Qe^{\int P\,dx}\,dx$, есть частное решение неоднородного уравнения (оно получается из общего, если положить $C_1 = 0$).

Покажем, что *знание одного частного решения линейного неоднородного уравнения позволяет привести его к однородному.* Пусть Y есть известное нам частное решение уравнения (37); введём новую искомую функцию z, связанную с y соотношением:

$$y = Y + z.$$

Подставляя в уравнение (37), находим:

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dz}{dx} + PY + Pz = Q.$$

Но так как Y есть, по предположению, решение уравнения (37), мы имеем тождество: $\frac{dY}{dx}+PY=Q$; в силу этого тождества последнее уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dx}+Pz=0.$$

Это — однородное линейное уравнение относительно z.

Таким образом, *если известно одно частное решение неоднородного линейного уравнения, то общее решение находится одной квадратурой.*

Если известно одно частное решение y_1 однородного линейного уравнения (38), *то выражение Cy_1 также будет решением*; оно содержит произвольное постоянное C, следовательно, это — общее решение. Итак, *общее решение* в этом случае *находится без квадратур.*

Посмотрим, что нам даёт знание двух частных решений неоднородного уравнения. Пусть эти решения будут Y_1 и Y_2. Имеем тождества:

$$\frac{dY_1}{dx}+PY_1=Q, \quad \frac{dY_2}{dx}+PY_2=Q.$$

Вычитая их почленно, получим:

$$\frac{d(Y_2-Y_1)}{dx}+P(Y_2-Y_1)=0.$$

Следовательно, Y_2-Y_1 является частным решением линейного уравнения без правой части. Из предыдущего вытекает, что общее решение уравнения (37) напишется так:

$$y=Y_1+C(Y_2-Y_1).$$

При знании двух частных решений линейного уравнения с правой частью общее решение находится без квадратур.

Примечание 1. Уравнение (38) допускает группу преобразований $x_1=x, y_1=Cy$ (аффинная группа); все его интегральные кривые получаются из одной какой-нибудь растяжением или сжатием всех ординат в одном и том же отношении. Неоднородное уравнение (37) допускает преобразования $y_1=y+Cz$, где z — частное решение однородного линейного уравнения; в самом деле,

$$\frac{dy_1}{dx}+Py_1=\frac{dy}{dx}+Py+C\left(\frac{dz}{dx}+Pz\right)=\frac{dy}{dx}+Py.$$

Таким образом, если взять за новую функцию $u=\frac{y}{z}$, то группа преобразований уравнения (37) будет:

$$x_1=x, \; u_1=\frac{y_1}{z}=\frac{y+Cz}{z}=u+C.$$

Отсюда видно, что дифференциальное уравнение между u и x не будет содержать явно u и, следовательно, интеграция его приведётся к квадратуре. Если сравнить эту замену переменных с приведёнными выше выкладками, то окажется, что новая искомая функция u есть не что иное, как C, рассматриваемое как функция от x.

Примечание 2. К тем же вычислениям для интеграции линейного неоднородного уравнения приводит такое рассуждение. Делаем в уравнении (37) замену искомой функции:

$$y = uv,$$

где u и v суть функции от x; получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + \left(Pu + \frac{du}{dx}\right)v = Q.$$

Определяем u таким образом, чтобы обратился в нуль коэффициент при v:

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0, \text{ откуда } u = e^{-\int P\,dx}$$

(нам достаточно взять частное решение, поэтому мы положили $C = 1$). После этого v определяется квадратурой из уравнения: $u\frac{dv}{dx} = Q$; получается

$$v = \int u^{-1}Q\,dx + C.$$

Примечание 3. Общее решение линейного уравнения, как видно из формулы (40), имеет вид:

$$y = C\varphi(x) + \psi(x), \tag{40_1}$$

где C — произвольное постоянное, φ и ψ — определённые функции от x. Легко показать, исключая постоянное C, что всякое уравнение имеющее общее решение вида (40_1), есть линейное.

Примечание 4. Линейное уравнение (37) сохраняет свой вид при следующих преобразованиях переменных:

1) любое преобразование независимого переменного $x = \varphi(\xi)$, где φ — дифференцируемая функция; в самом деле, подставляя в уравнение (37), получаем:

$$\frac{dy}{d\xi} + P[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)y = Q[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)$$

— опять линейное уравнение;

2) любое линейное преобразование зависимого переменного $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, где α и β — произвольные дифференцируемые функции от x, $\alpha(x) \neq 0$, в рассматриваемом интервале. В самом деле, совершив преобразование, получаем:

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + P\right)z = \frac{Q - P\beta - \beta'}{\alpha},$$

т. е. снова линейное уравнение.

2. К линейному уравнению преобразованием искомой функции легко приводится *уравнение Бернулли*[1]):

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n. \tag{41}$$

Здесь P, Q — заданные непрерывные функции x, а n — некоторое постоянное число. При $n = 0$ имеем неоднородное линейное уравнение, при $n = 1$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)y = 0$$

— однородное линейное дифференциальное уравнение. Итак, будем предполагать $n \neq 0$, $\neq 1$. Разделив обе части уравнения (41) на y^n[2]), получим:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q.$$

Легко заметить, что первый член с точностью до постоянного коэффициента равен производной от множителя при P, т. е. от y^{-n+1}; поэтому введём новую функцию:

$$z = y^{-n+1},$$

тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Умножая обе части уравнения на $(-n+1)$ и вводя значения z и $\frac{dz}{dx}$, получим для z линейное уравнение (неоднородное):

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q.$$

Подставив в его общее решение вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли; он легко разрешается относительно y. При $n > 0$ мы имеем ещё решение $y = 0$.

ЗАДАЧА.

20. Написать формулы общего интеграла и общего решения уравнения Бернулли.

Пример 10. Проинтегрировать уравнение Бернулли:

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

---

[1]) Уравнение это предложено Яковом Бернулли в 1695 г., метод решения опубликован Иваном Бернулли в 1697 г.

[2]) Мы предполагаем, что $y \neq 0$.

Здесь $n=\frac{1}{2}$. Делим обе части на $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Вводим новое переменное:

$$z=\sqrt{y},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2}.$$

Решаем однородное линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x},\quad \frac{dz}{z}=\frac{2\,dx}{x},\quad \ln z=2\ln x+\ln C,\quad z=Cx^2.$$

Применяем вариацию постоянной:

$$\frac{dz}{dx}=2Cx+x^2\frac{dC}{dx};$$

вставляем в неоднородное уравнение:

$$2Cx+x^2\frac{dC}{dx}-\frac{2Cx^2}{x}=\frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2x},\qquad C=\frac{1}{2}\ln x+C_1.$$

Следовательно,

$$z=x^2\left(C_1+\frac{1}{2}\ln x\right)$$

и, наконец,

$$y=x^4\left(C_1+\frac{1}{2}\ln x\right)^2.$$

Пример 11. В физике устанавливается следующая связь между силой тока i и электродвижущей силой E в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L (R и L — постоянные):

$$E=Ri+L\frac{di}{dt}.$$

Если рассматривать E как заданную функцию от t, то это — линейное дифференциальное уравнение для силы тока i. Напишем его в виде:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}. \tag{42}$$

Проинтегрируем уравнение (42) в предположении $E = \text{const.}$, при начальном условии $i = 0$ при $t = 0$ (включение в цепь, в которой не было тока, постоянной электродвижущей силы). Интеграция однородного линейного уравнения даёт:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt, \quad i = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Вместо вариации постоянной перейдём к общему решению уравнения (42), угадав его частное решение в виде некоторой постоянной A; подставив её в уравнение, получим:

$$\frac{R}{L}A = \frac{E}{L}, \quad A = \frac{E}{R}.$$

Итак, общее решение уравнения (42) в нашем предположении есть

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Определим C из начального условия при $t = 0$:

$$0 = \frac{E}{R} + C, \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Искомое частное решение будет:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

При $t = 0$ сила тока равна 0, а затем быстро приближается к постоянному значению $\frac{E}{R}$ (процесс установления постоянного тока).

ЗАДАЧИ.

31. Проинтегрировать уравнение (42) в случае периодически изменяющейся электродвижущей силы:

$$E = E_0 \sin \omega t \text{ (переменный ток).}$$

Проинтегрировать уравнения:

32. $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x.$

33. $\frac{dy}{dx} + y\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\frac{d\varphi}{dx}$ (φ — данная функция x).

34. $\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x.$

35. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)}.$

36. $(x - 2yx - y^2)\,dy + y^2\,dx = 0.$

37. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

38. $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2y} = 0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $x=0$, $y=1$.

39. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$.

40. $(x-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

§ 5. Уравнение Якоби.

К числу уравнений первого порядка, общее решение которых выражается в элементарных функциях, относится *уравнение Якоби*. Оно имеет вид:

$$(Ax+By+C)\,dx + (A'x+B'y+C')\,dy + \\ + (A''x+B''y+C'')\,(x\,dy - y\,dx) = 0, \qquad (43)$$

где A, B, ..., C'' — постоянные.

Если его написать в форме:

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

то M и N окажутся многочленами второго порядка по x, y, причём члены второго порядка в выражении для M имеют вид:

$$-A''xy - B''y^2,$$

а в выражении N они будут:

$$A''x^2 + B''xy.$$

Для исследования[1]) уравнения Якоби удобно ввести новые переменные, соответствующие однородным координатам аналитической геометрии:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда

$$dx = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3^2}, \quad dy = \frac{x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3}{x_3^2}, \quad x\,dy - y\,dx = \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_3^2}.$$

Вставляя эти значения переменных и дифференциалов в уравнение (43), мы можем написать его в виде:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0, \qquad (44)$$

где

$$a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad b_x = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad c_x = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

суть линейные формы относительно однородных координат.

Чтобы возвратиться к декартовым координатам, достаточно положить $x_3 = 1$.

---

[1]) Приводимый здесь метод исследования уравнения Якоби принадлежит Д. Ф. Егорову, неоднократно излагавшему этот метод на своих лекциях в Московском университете.

Введём новые координаты x_1', x_2', x_3', связанные с первоначальными координатами линейными преобразованиями:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \gamma_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \gamma_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= \gamma_{31}x_1 + \gamma_{32}x_2 + \gamma_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где γ_{ik} — постоянные с определителем $\neq 0$, а ρ — любая функция от x_i.

Преобразование (45) эквивалентно дробно-линейному преобразованию координат x и y в новые координаты $x' = \frac{x_1'}{x_3'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_3'}$. Покажем, что при таком преобразовании уравнение Якоби переходит в уравнение того же типа. Положим сначала $\rho = 1$. Умножая определитель, стоящий в левой части уравнения (44), на определитель из γ_{ik} (строки на строки), в первой строке определителя получим, очевидно, dx_1', dx_2', dx_3', во второй x_1', x_2', x_3', в третьей — три линейные формы от x_1, x_2, x_3, которые преобразуются в линейные формы $a_{x'}'$, $b_{x'}'$, $c_{x'}'$ от x_1', x_2', x_3'; в результате получаем:

$$\begin{vmatrix} dx_1' & dx_2' & dx_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ a_{x'}' & b_{x'}' & c_{x'}' \end{vmatrix} = 0, \tag{44'}$$

т. е. опять уравнение типа Якоби. Если теперь заменить x_1', x_2', x_3' на $\rho x_1'$, $\rho x_2'$, $\rho x_3'$, где $\rho \neq 0$ есть функция от x_i, то во второй и третьей строках ρ выйдет общим множителем, а в первой строке будем иметь:

$$\rho\, dx_1' + x_1'\, d\rho, \quad \rho\, dx_2' + x_2'\, d\rho, \quad \rho\, dx_3' + x_3'\, d\rho;$$

но если из членов первой строки вычесть члены второй, умноженные на $d\rho$, то вторые слагаемые исчезнут; ρ выйдет общим множителем, и мы опять получим уравнение (44'). Таким образом, уравнение (44') связывает не самые переменные x_1, x_2, x_3, а их отношения, — оно эквивалентно уравнению (43).

Уравнение Якоби допускает частные линейные интегралы. Напишем линейное соотношение в однородных координатах:

$$\sum u_i x_i \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \tag{46}$$

и потребуем, чтобы оно удовлетворяло уравнению (44). Умножая первый и второй столбцы определителя в левой части (44) на u_1, u_2 и прибавляя к третьему, умноженному на u_3, получаем:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \sum u_i\, dx_i \\ x_1 & x_2 & \sum u_i x_i \\ a_x & b_x & u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Замечая ещё, что, в силу равенства (46), $\sum u_i\, dx_i = 0$, мы приходим к условию:

$$(u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x)(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2) = 0.$$

Но так как x_1, x_2, x_3 совершенно равноправны, мы можем получить два таких же равенства со вторыми множителями: $x_3\, dx_2 - x_2\, dx_3$, $x_1\, dx_3 - x_3\, dx_1$. Замечая, что все эти множители одновременно не равны нулю, мы приходим

к заключению, что всякий раз, когда выполняется (46), $u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x = 0$, а тогда, как легко видеть, обе линейные формы пропорциональны, т. е. имеем тождественно:

$$u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x = \lambda(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$

(λ — множитель пропорциональности).

Подставляя вместо a_x, b_x, c_x их выражения через x_1, x_2, x_3 и приравнивая в получающемся тождестве коэффициенты при x_1, x_2, x_3, получаем три однородных уравнения для определения u_1, u_2, u_3:

$$\left.\begin{aligned} (a_1-\lambda)u_1 + b_1u_2 + c_1u_3 &= 0, \\ a_2u_1 + (b_2-\lambda)u_2 + c_2u_3 &= 0, \\ a_3u_1 + b_3u_2 + (c_3-\lambda)u_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Чтобы система (47) имела отличные от нуля решения, определитель этой системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили для λ кубическое уравнение. Если оно имеет три различных действительных корня λ_1, λ_2, λ_3, то из уравнения (47) получится три различных решения u_1, u_2, u_3, т. е. уравнение Якоби допускает в качестве интегральных три прямые. Пусть их уравнения будут:

$$\begin{aligned} u_x &\equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \\ v_x &\equiv v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0, \\ w_x &\equiv w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0. \end{aligned}$$

Возьмём эти прямые за оси новой трилинейной системы координат, новые координаты опять будем обозначать через x_1, x_2, x_3. Уравнение (44) допускает, по предположению, решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Подставляя в (44) первое решение и требуя, чтобы оно обращало уравнение (44) в тождество, найдём:

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Аналогично учитывая, что $x_2 = 0$ есть решение, получим $b_1 = b_3 = 0$, а из решения $x_3 = 0$ получим $c_1 = c_2 = 0$ (здесь $a_1, \ldots, c_3$ — соответствующие коэффициенты в новых координатах).

Уравнение Якоби приведётся тогда к виду:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1x_1 & b_2x_2 & c_3x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{x_1} & \dfrac{dx_2}{x_2} & \dfrac{dx_3}{x_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(c_3-b_2)\frac{dx_1}{x_1} + (a_1-c_3)\frac{dx_2}{x_2} + (b_2-a_1)\frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Общий его интеграл в однородных координатах, очевидно, есть

$$x_1^{c_3-b_2}x_2^{a_1-c_3}x_3^{b_2-a_1} = C,$$

или, переходя к старым трилинейным координатам,

$$(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^\alpha(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)^\beta(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3)^\gamma=C,$$

причём

$$\alpha+\beta+\gamma=(c_3-b_2)+(a_1-c_3)+(b_2-a_1)=0.$$

Поэтому в декартовых координатах общее решение будет иметь вид:

$$(u_1x+u_2y+u_3)^\alpha(v_1x+v_2y+v_3)^\beta(w_1x+w_2y+w_3)^\gamma=C.$$

Можно аналогично исследовать все остальные случаи — один действительный и два мнимых корня, и ряд случаев для кратных корней. Не останавливаясь на этом, дадим метод, который позволяет всегда проинтегрировать уравнение Якоби. Кубическое уравнение для λ имеет всегда один действительный корень; следовательно, уравнение Якоби имеет, по крайней мере, одну интегральную прямую. Пусть её уравнение будет:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

Сделаем замену переменных:

$$x_1'=x_1,\quad x_2'=x_2,\quad x_3'=u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3;$$

если $u_3\neq 0$, то определитель этой подстановки не равен 0 (если бы было $u_3=0$, а, например $u_1\neq 0$, то мы положили бы $x_1'=u_x$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3$). Преобразуем уравнение (44), умножая первый и второй столбцы на u_1, u_2 и складывая с третьим, умноженным на u_3; новое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} dx_1' & dx_2' & dx_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ a_{x'}' & b_{x'}' & c_{x'}' \end{vmatrix}=0.$$

Подобно предыдущему, убеждаемся, что $c_{x'}'=c_3'x_3'$. Затем переходим к декартовым координатам, полагая $x_1'=x'$, $x_2'=y'$, $x_3'=1$; геометрически это значит, что мы совершаем преобразование, переводящее интегральную прямую $u_x=0$ в бесконечно удалённую прямую плоскости $x'y'$. Уравнение Якоби примет вид:

$$dx'(c_3'y'-b_1'x'-b_2'y'-b_3')-dy'(c_3'x'-a_1'x'-a_2'y'-a_3')=0,$$

т. е. мы получили уравнение, приводимое к однородному, которое интегрируется в квадратурах.

Если не переходить к однородным координатам, то правило интегрирования уравнения Якоби можно сформулировать так: находим один линейный интеграл уравнения (44):

$$u_1x+u_2y+u_3=0;$$

вводим новые переменные:

$$x'=\frac{x}{u_1x+u_2y+u_3},\quad y'=\frac{y}{u_1x+u_2y+u_3};$$

преобразованное уравнение в переменных x', y' будет вида, приводимого к однородному.

Пример 12.

$$(14x+13y+6)\,dx+(4x+5y+3)\,dy+(7x+5y)\,(y\,dx-x\,dy)=0.$$

Вводим однородные координаты:

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},\quad dx=\frac{x_3\,dx_1-x_1\,dx_3}{x_3^2},\quad dy=\frac{x_3\,dx_2-x_2\,dx_3}{x_3^2},$$

$$y\,dx-x\,dy=\frac{x_2\,dx_1-x_1\,dx_2}{x_3^2}.$$

Уравнение в форме определителя напишется так:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 4x_1+5x_2+3x_3 & -14x_1-13x_2-6x_3 & 7x_1+5x_2 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение для определения λ будет:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -14 & 7 \\ 5 & -13-\lambda & 5 \\ 3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27=0.$$

Все его корни равны: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-3$.

Уравнения (47) для определения u_1, u_2, u_3 примут вид:

$$7u_1-14u_2+7u_3=0,\quad 5u_1-10u_2+5u_3=0,\quad 3u_1-6u_2+3u_3=0,$$

т. е. все сводятся к одному:

$$u_1-2u_2+u_3=0.$$

Вместо одной интегральной прямой мы получаем целый пучок интегральных прямых, так как одного уравнения недостаточно для определения двух отношений $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{u_2}{u_3}$. Выражая u_3 через u_1 и u_2 и вставляя в уравнение $u_x=0$, мы получим уравнение пучка:

$$u_1(x_1-x_3)+u_2(x_2+2x_3)=0$$

(u_1, u_2 — однородные параметры пучка).

Здесь нет надобности делать дальнейшие подстановки, так как уравнение пучка содержит одно (существенное) постоянное $\left(\text{за которое можно принять } -\frac{u_2}{u_1}\right)$ и, следовательно, является общим интегралом уравнения. В декартовых координатах этот интеграл имеет вид:

$$x-1=C(y+2).$$

Пример 13.

$$(7x+8y+5)\,dx-(7x+8y)\,dy+5(x-y)\,(y\,dx-x\,dy)=0.$$

Вводим однородные координаты и приводим к виду:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -7x_1-8x_2 & -7x_1-8x_2-5x_3 & 5x_1-5x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение для λ будет:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & -7 & 5 \\ -8 & -8-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda - 375 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -15$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 5$. Находим формы u_x, v_x, w_x. Имеем для u_1, u_2, u_3 уравнения (соответствующие λ_1):

$$8u_1 - 7u_2 + 5u_3 = 0, \quad -8u_1 + 7u_2 - 5u_3 = 0, \quad -5u_2 + 15u_3 = 0,$$

из которых только два независимых; одной из систем их решений будет

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 1.$$

Аналогично для v_1, v_2, v_3 имеем (корень λ_2):

$$-2v_1 - 7v_2 + 5v_3 = 0, \quad -8v_1 - 3v_2 - 5v_3 = 0, \quad -5v_2 + 5v_3 = 0;$$

система решений:

$$v_1 = -1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 1;$$

наконец, для w_1, w_2, w_3 имеем:

$$-12w_1 - 7w_2 + 5w_3 = 0, \quad -8w_1 - 13w_2 - 5w_3 = 0, \quad -5w_2 - 5w_3 = 0,$$

откуда решения:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = 1.$$

Итак,

$$u_x = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \quad v_x = -x_1 + x_2 + x_3, \quad w_x = x_1 - x_2 + x_3.$$

Вводя в уравнение переменные u, v, w, определённые этими формулами, получаем:

$$\begin{vmatrix} du & dv & dw \\ u & v & w \\ -15u & -5v & 5w \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{du}{u}(5+5) + \frac{dv}{v}(-15-5) + \frac{dw}{w}(-5+15) = 0$$

и интегрируя:

$$uw = Cv^2,$$

или, возвращаясь к первоначальным переменным,

$$(2x + 3y + 1)(x - y + 1) = C(-x + y + 1)^2.$$

§ 6. Уравнение Риккати.

В заключение этой главы мы рассмотрим ещё один тип уравнений первого порядка. В противоположность ранее разобранным типам, в настоящем случае решение уравнения не может быть вообще выражено в квадратурах. Тем не менее, мы будем говорить о решениях этого уравнения, как о существующих, так как в следующей главе существование решений дифференциального уравнения будет доказано.

1. Общее *уравнение Риккати* имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{48}$$

где P, Q, R — непрерывные функции от x при изменении x в интервале $a < x < b$ ($a \geqslant -\infty$, $b \leqslant \infty$). Уравнение (48) заключает в себе как частные случаи уже рассмотренные нами уравнения: при $P \equiv 0$ получаем линейное уравнение, при $R \equiv 0$ — уравнение Бернулли.

Уравнение Риккати сохраняет свой вид при следующих преобразованиях переменных:

1) Произвольное преобразование независимого переменного:

$$x = \varphi(x_1)$$

(φ — дифференцируемая функция). В самом деле, производя в уравнении (48) эту замену переменного, получим опять уравнение Риккати:

$$\frac{dy}{dx_1} = P[\varphi(x_1)]\,\varphi'(x_1)\,y^2 + Q[\varphi(x_1)]\,\varphi'(x_1)\,y + R[\varphi(x_1)]\,\varphi'(x_1).$$

2) Произвольное дробно-линейное преобразование зависимого переменного:

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta},$$

где α, β, γ, δ — произвольные дифференцируемые функции от x, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ в рассматриваемом интервале. В самом деле, дифференцируя, получаем (штрихи обозначают производные по x):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\alpha \frac{dy_1}{dx} + \alpha' y_1 + \beta'\right)(\gamma y_1 + \delta) - \left(\gamma \frac{dy_1}{dx} + \gamma' y_1 + \delta'\right)(\alpha y_1 + \beta)}{(\gamma y_1 + \delta)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{dy_1}{dx} + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)\,y_1^2 + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \alpha\delta' - \beta\gamma')\,y_1 + (\beta'\delta - \delta'\beta)}{(\gamma y_1 + \delta)^2}.$$

Подстановка же в правую часть уравнения (48) даёт дробь с тем же знаменателем и с квадратным многочленом по y_1 в числителе. Очевидно, получается уравнение типа Риккати.

Этими преобразованиями можно воспользоваться для приведения уравнения к наиболее простому (каноническому) виду.

1) *Коэффициент при квадрате зависимого переменного можно сделать равным* ± 1. Для этого в уравнении (48) произведём (линейную) замену искомой функции:

$$y = \omega(x) z,$$

где ω — пока неизвестная функция. Подставляя в уравнение (48), получаем:

$$\omega \frac{dz}{dx} + z\omega' = P\omega^2 z^2 + Q\omega z + R,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = P\omega z^2 + \left(Q - \frac{\omega'}{\omega}\right) z + \frac{R}{\omega}.$$

Если теперь взять $\omega = \pm \frac{1}{P}$, то уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + \left(Q - \frac{P'}{P}\right) z \pm PR.$$

(Замена годится для интервала изменения x, в котором P не обращается в нуль.)

2) *Не изменяя коэффициента при квадрате зависимого переменного, можно коэффициент при первой степени зависимого переменного сделать равным* 0. Для этого введём в уравнение (48) новое зависимое переменное u подстановкой:

$$y = u + \alpha(x).$$

Тогда преобразованное уравнение будет:

$$\frac{du}{dx} = Pu^2 + [Q + 2P\alpha(x)]\, u + R + P\alpha^2 + Q\alpha - \alpha'.$$

Достаточно выбрать $\alpha(x) = -\frac{Q}{2P}$, чтобы получить коэффициент при u равным 0. Комбинируя обе подстановки, мы всегда можем привести уравнение Риккати к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x). \tag{48_1}$$

2. Как уже упомянуто, решение уравнения Риккати не сводится вообще говоря, к квадратурам. Но имеет место теорема:

Если известно одно частное решение уравнения Риккати, полное решение получается двумя квадратурами.

В самом деле, пусть известное частное решение уравнения (48) есть $y = y_1(x)$, т. е. мы имеем тождественно:

$$y_1' = Py_1^2 + Qy_1 + R. \tag{48$_2$}$$

Делая замену зависимого переменного:

$$y = y_1 + z,$$

где z — новая искомая функция, получаем:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = Py_1^2 + 2Py_1z + Pz^2 + Qy_1 + Qz + R,$$

или, в силу тождества (48_2),

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z. \tag{49}$$

Получилось уравнение Бернулли, которое, как мы видели, интегрируется двумя квадратурами. Для приведения уравнения (49) к линейному следует положить $z = \frac{1}{u}$, откуда $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$; уравнение (линейное) для u будет:

$$\frac{du}{dx} + (2Py_1 + Q)u = -P. \tag{50}$$

Его общий интеграл имеет вид (§ 4, примечание 3):

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

где φ и ψ — некоторые функции от x; отсюда мы выводим форму общего решения уравнения (48):

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Итак, *общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной.*

Покажем, что и обратно, *если общее решение уравнения есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной, то соответствующее дифференциальное уравнение есть уравнение Риккати.*

Действительно, пусть общее решение дифференциального уравнения есть

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)};$$

разрешаем его относительно C и исключаем C дифференцированием:

$$C=\frac{\varphi_2-y\psi_2}{y\psi_1-\varphi_1};$$

$$(\varphi_2'-y'\psi_2-y\psi_2')(y\psi_1-\varphi_1)-(y'\psi_1+y\psi_1'-\varphi_1')(\varphi_2-y\psi_2)=0,$$

или

$$y'(\varphi_1\psi_2-\psi_1\varphi_2)+y^2(\psi_1'\psi_2-\psi_1\psi_2')+$$
$$+y(\varphi_2'\psi_1-\varphi_1'\psi_2-\psi_1'\varphi_2+\psi_2'\varphi_1)+(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_2'\varphi_1)=0,$$

т. е. мы действительно получили уравнение типа Риккати.

Если известны два частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится одной квадратурой. В самом деле, если, кроме решения $y=y_1$, известно второе решение y_2, то для уравнения (50) известно одно частное решение $u_1=\dfrac{1}{y_2-y_1}$, а в таком случае мы знаем, что решение его требует одной квадратуры.

Наконец, *если известны три частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится без квадратур.* Пусть эти три решения уравнения (48) суть y_1, y_2, y_3; как и в предыдущем случае, убеждаемся в том, что уравнение (50) имеет два известных частных решения: $\dfrac{1}{y_2-y_1}$ и $\dfrac{1}{y_3-y_1}$; в таком случае общее решение уравнения (50) напишется так:

$$u=\frac{1}{y_2-y_1}+C\left(\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\right),$$

или, заменяя u его значением $\dfrac{1}{y-y_1}$, перенося первый член правой части влево, умножая обе части на y_2-y_1 и разрешая относительно C:

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C.$$

Это и есть общий интеграл уравнения Риккати.

Заметим, что если вместо y подставить какое-нибудь четвёртое частное решение y_4, то получим:

$$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C,$$

т. е. *ангармоническое отношение любых четырёх частных решений уравнения Риккати равно постоянному.*

3. Уравнение Риккати специальное есть частный случай уравнения (48); оно имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{\alpha}, \qquad (51)$$

где a, b и α — постоянные; для определённости мы будем рассматривать интервал изменения для x: $0 < x < +\infty$. Легко усмотреть два случая, когда это уравнение интегрируется в элементарных функциях.

1) $\alpha = 0$; $\frac{dy}{dx} + ay^2 = b$; тогда переменные разделяются:

$$\frac{dy}{b - ay^2} = dx.$$

2) $\alpha = -2$; уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{b}{x^2}. \tag{52}$$

Сделаем в (52) замену зависимого переменного:

$$y = \frac{1}{z}.$$

Преобразованное уравнение будет:

$$-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{a}{z^2} = \frac{b}{x^2}, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

Получилось однородное уравнение; оно интегрируется в квадратурах.

Примечание. К виду (52) приводится более общее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{ly}{x} + \frac{b}{x^2}$$

(a, l, b — постоянные) разобранной выше подстановкой, уничтожающей член с y в первой степени.

Кроме $\alpha = 0$ и $\alpha = -2$, существует ещё бесконечное множество других значений α, при которых уравнение Риккати (51) интегрируется в элементарных функциях. Для нахождения этих значений, преобразуя в уравнении (51) зависимое переменное линейной подстановкой

$$y = u\bar{y} + v,$$

подберём функции u и v от x так, чтобы преобразованное уравнение не содержало члена с первой степенью искомой функции и чтобы свободный член не изменился. Имеем:

$$u\frac{d\bar{y}}{dx} + u'\bar{y} + v' + au^2\bar{y}^2 + 2auv\bar{y} + av^2 = bx^\alpha.$$

Поставленные условия дают два уравнения для определения u и v:

$$u' + 2auv = 0, \qquad v' + av^2 = 0.$$

Из второго уравнения находим:

$$\frac{dv}{v^2} = -a\,dx, \qquad v = \frac{1}{ax} \text{ (частное решение).}$$

После этого из первого уравнения получаем:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x}, \qquad u = \frac{1}{x^2} \text{ (частное решение).}$$

Искомая подстановка имеет вид: $y = \frac{\bar{y}}{x^2} + \frac{1}{ax}$, и преобразованное уравнение напишется так:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{a}{x^2}\bar{y}^2 = bx^{\alpha+2}.$$

Далее, делаем подстановку (дробно-линейную):

$$\bar{y} = \frac{1}{y_1},$$

при этом y_1 связан с y соотношением:

$$y = \frac{1}{y_1 x^2} + \frac{1}{ax}; \tag{53}$$

новое уравнение будет:

$$\frac{dy_1}{dx} + bx^{\alpha+2}y_1^2 = \frac{a}{x^2}.$$

Деля обе части на $x^{\alpha+2}$, преобразуем, наконец, независимое переменное так, чтобы член с y_1^2 имел постоянный коэффициент:

$$\frac{dy_1}{x^{\alpha+2}dx} + by_1^2 = ax^{-(\alpha+4)}.$$

Очевидно, что для приведения уравнения к виду (51) достаточно положить:

$$x^{\alpha+3} = x_1, \qquad dx_1 = (\alpha+3)\,x^{\alpha+2}dx, \quad x = x_1^{\frac{1}{\alpha+3}}, \tag{54}$$

и мы получаем окончательно:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{\alpha+3}y_1^2 = \frac{a}{\alpha+3}x_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}. \tag{55}$$

Это есть уравнение вида (51), где новые коэффициенты имеют значения $a_1 = \frac{b}{\alpha+3}$, $b_1 = \frac{a}{\alpha+3}$, и показатель α заменился через

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha+4}{\alpha+3}.$$

Последнюю дробно-линейную подстановку, связывающую α и α_1, приводим к следующему «каноническому виду»:

$$\frac{1}{\alpha_1+2} = \frac{1}{2-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = \frac{\alpha+3}{\alpha+2}, \text{ или } \frac{1}{\alpha_1+2} = 1 + \frac{1}{\alpha+2}.$$

Применяя к уравнению (55) с новыми a_1, b_1 и α_1 те же преобразования (53), (54), придём опять к уравнению того же типа, в котором показатель α_2 при x связан с x_1 и с α соотношениями:

$$\frac{1}{\alpha_2+2}=1+\frac{1}{\alpha_1+2}=2+\frac{1}{\alpha+2}.$$

В результате k подобных преобразований придём к показателю α_k, связанному с исходным показателем α соотношением:

$$\frac{1}{\alpha_k+2}=k+\frac{1}{\alpha+2} \qquad (k=1,\ 2,\dots).$$

Если, отправляясь от показателя α, мы проведём в обратном порядке вышеуказанные последовательные преобразования переменных, мы придём к уравнениям с показателями α_{-1}, $\alpha_{-2}, \dots, \alpha_{-k}, \dots$, связанными с α соотношениями:

$$\frac{1}{\alpha_{-k}+2}=-k+\frac{1}{\alpha+2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Если в результате преобразований мы придём к показателю, для которого уравнение Риккати интегрируется в квадратурах, то и начальное уравнение обладает тем же свойством. Как легко видеть из первоначальной формулы, связывающей α и α_1, при $\alpha=-2$ мы имеем $\alpha_1=-2$, т. е. показатель -2 не изменяется при рассматриваемых преобразованиях и, следовательно, не может произойти в результате этих преобразований от другого показателя. Поэтому нас будут интересовать лишь те случаи, когда для некоторого натурального k мы имеем: $\alpha_k=0$ или $\alpha_{-k}=0$.

Предполагая теперь k любым целым числом (положительным или отрицательным), мы в обоих этих случаях имеем:

$$\frac{1}{\alpha+2}=-k+\frac{1}{2}, \text{ откуда } \alpha=\frac{4k}{-2k+1} \qquad (k=\pm 1,\ \pm 2\dots).$$

Мы получили две бесконечные последовательности показателей, для которых уравнение Риккати сводится путём ряда преобразований к случаю $\alpha=0$; это будут:

$$k=\quad 1,\quad 2,\quad 3,\dots;\quad \alpha=-4,\quad -\frac{8}{3},\quad -\frac{12}{5},\dots;$$

$$k=-1,\ -2,\ -3,\dots;\quad \alpha=-\frac{4}{3},\quad -\frac{8}{5},\quad -\frac{12}{7},\dots$$

Обе последовательности имеют пределом -2. Разрешая найденную для α формулу относительно k, получаем: $\frac{\alpha}{2\alpha+4}$ равно целому числу; это — признак того, что α принадлежит к одной из указанных последовательностей.

При $\alpha=0$, как легко убедиться, y выражается через показательные и тригонометрические функции от x; последовательные преобразования вводят ещё дробные степени x; в результате y выражается через x в элементарных функциях.

Как показал Лиувилль (1841 г.), при всех других значениях α решение специального уравнения Риккати не может быть выражено квадратурами от элементарных функций.

Уравнение Риккати имеет то общее свойство с линейными уравнениями, что знание некоторого числа частных решений позволяет найти общее решение или привести его отыскание к квадратурам. Дарбу исследовал широкий класс уравнений, обладающих тем свойством, что, зная достаточное количество их частных решений, можно получить общее решение без квадратур или с помощью одной квадратуры; это — так называемые «*уравнения Дарбу*»; частным случаем этого класса является уравнение Якоби.

Пример 14. $\frac{dy}{dx}=y^2+\frac{1}{2x^2}$. Подстановка $y=\frac{1}{z}$ даёт:

$$\frac{dz}{dx}=-1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

Далее,

$$z=ux.$$

$$u+x\frac{du}{dx}=-1-\frac{1}{2}u^2,\qquad \frac{du}{u^2+2u+2}=-\frac{dx}{2x},$$

$$\frac{du}{1+(u+1)^2}=-\frac{dx}{2x},\qquad u+1=\operatorname{tg}\left(C-\frac{1}{2}\ln x\right),$$

$$z=x\left[-1+\operatorname{tg}\left(C-\frac{1}{2}\ln z\right)\right]$$

и, наконец,

$$y=\frac{1}{x\left[-1+\operatorname{tg}\left(C-\frac{1}{2}\ln x\right)\right]}.$$

Пример 15. $\frac{dy}{dx}+y^2=x^{-\frac{4}{3}}$. Показатель соответствует значению $k=-1$, следовательно, надо все подстановки вести в обратном порядке. Для удобства сравнения с соответствующими формулами обозначим исходные переменные через x_1, y_1. Итак, имеем:

$$\frac{dy_1}{dx_1}+y_1^2=x_1^{-\frac{4}{3}};$$

здесь $\alpha_1=-\frac{4}{3}=-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}$, т. е. $\alpha=0$. Делаем замену независимого переменного: $x^3=x_1$, $dx_1=3x^2\,dx$. Получаем:

$$\frac{dy_1}{dx}+3x^2y_1^2=\frac{3}{x^2}.$$

Переходя к переменному $\bar{y}=\frac{1}{y_1}$, находим:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}+\frac{3}{x^2}\bar{y}^2=3x^2.$$

Мы имеем $a=3$, $b=3$. Разрешая относительно $\bar{y}$ формулу преобразования $y=\frac{\bar{y}}{x^2}+\frac{1}{3x}$, имеем:

$$\bar{y}=x^2y-\frac{x}{3};$$

подставляем в последнее уравнение:

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy-\frac{1}{3}+3x^2y^2-2xy+\frac{1}{3}=3x^2$$

или, упрощая,

$$\frac{dy}{dx}+3y^2=3.$$

Интегрируем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{1-y^2}=3\,dx,\quad \frac{dy}{1-y}+\frac{dy}{1+y}=6\,dx,\quad \frac{1+y}{1-y}=Ce^{6x},\quad y=\frac{Ce^{6x}-1}{Ce^{6x}+1}.$$

Возвращаемся постепенно к первоначальным переменным:

$$\bar{y}=\frac{x^2(Ce^{6x}-1)}{Ce^{6x}+1}-\frac{x}{3}=\frac{(3x^2-x)\,Ce^{6x}-(3x^2+x)}{3(Ce^{6x}+1)},$$

$$y_1=\frac{3(Ce^{6x}+1)}{(3x^2-x)\,Ce^{6x}-(3x^2+x)}$$

и, наконец,

$$y_1=\frac{3\left(Ce^{6x_1^{1/3}}+1\right)}{(3x_1^{2/3}-x_1^{1/3})\,Ce^{6x_1^{1/3}}-(3x_1^{2/3}+x_1^{1/3})}.$$

ЗАДАЧИ.

41. $y'=\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3x^2}$.

42. $y'+y^2+\frac{1}{x}y-\frac{4}{x^2}=0$.

43. $xy'-3y+y^2=4x^2-4x$; угадать сначала частное решение.

44. $y'=y^2+x^{-4}$.

Мы изучили главнейшие типы уравнений первого порядка, которые в конечном счёте интегрируются методом разделения переменных. Этими типами не исчерпываются все уравнения, которые могут быть приведены к разделяющимся переменным. Во многих случаях соответственным образом подобранная подстановка приводит дифференциальное уравнение к одному из известных типов. Ряд таких «нешаблонных» уравнений приведён ниже.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ.

45. Решить функциональное уравнение [$f(x)$ — известная

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

Указания. 1) Можно заранее предполагать функцию f дифференцируемой, и тогда способ решения: дифференцировать по y и затем положить $y=0$. 2) Достаточно допустить существование $f'(0)$; способ решения: вычислить $f'(x)$ как $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}$.

46. $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx}=(1+y^2)^{3/2}$.

Указание. Ввести переменные $x=\operatorname{tg}\varphi$, $y=\operatorname{tg}\psi$.

47. $\dfrac{dy}{dx}(x^2+y^2+3)=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$.

48. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y^2}{2y(x+y^2)}$.

49. $[x(x+y)+a^2]\dfrac{dy}{dx}=y(x+y)+b^2$.

Указание. Ввести новые переменные $x=u+v$, $y=ku-v$, где постоянное k подобрать так, чтобы переменные разделялись. Можно заметить также, что это уравнение — типа Якоби.

50. Дано уравнение: $\dfrac{dy}{dx}=ky+f(x)$, где k — постоянное, а $f(x)$ — периодическая функция периода ω; доказать, что это уравнение имеет одно частное решение, периодическое с тем же периодом, и найти это решение (Ляпунов).

ГЛАВА II.

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Теорема существования (Коши и Пеано).

В главе I рассмотрены различные типы дифференциальных уравнений первого порядка, для которых мы умеем находить общий интеграл; этот интеграл заключал одно произвольное постоянное. С другой стороны, геометрические соображения (построение кривых по данному полю направлений) давали нам основание ожидать, что произвольное дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное множество решений и что через каждую точку (x_0, y_0) проходит одна интегральная кривая. В настоящем параграфе мы, наложив определённые ограничения на правую часть дифференциального уравнения (первого порядка), докажем существование и единственность решения, определяемого начальными данными (x_0, y_0). Первое доказательство существования решения дифференциальных уравнений принадлежит Коши; приводимое нами доказательство дано Пикаром; оно производится при помощи *метода последовательных приближений*, который не только устанавливает, что решение существует, но и даёт возможность приближённо вычислять это решение.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и даны начальные значения (x_0, y_0). Относительно функции $f(x, y)$ мы предположим следующее:

A) *$f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных в замкнутой области*[1] R:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

[1]) Областью определения функции $f(x, y)$ может быть любая область плоскости xOy, в частности вся плоскость; из этой области D мы выделяем прямоугольную область R с центром в точке (x_0, y_0).

где a и b — некоторые положительные числа. Так как непрерывная функция является в замкнутой области ограниченной, то из условия А) следует существование такого положительного числа M, что *неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant M \tag{2}$$

выполняется для всех точек области R;

В) *функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области R относительно переменного y условию Липшица*: существует такое положительное число N, что для любого значения x, $|x - x_0| \leqslant a$, и любых двух значений y' и y'' переменного y, $|y' - y_0| \leqslant b$, $|y'' - y_0| \leqslant b$, выполняется неравенство:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant N |y' - y''|. \tag{3}$$

Примечание 1. Неравенство (3) всегда выполнено, если функция $f(x, y)$ имеет в каждой точке области частную производную $f'_y(x, y)$, ограниченную во всей области R, т. е. если $|f'_y| \leqslant N$; в самом деле, тогда мы имеем по теореме Лагранжа:

$$f(x, y') - f(x, y'') = (y' - y'') f'_y [x, y' + \theta (y'' - y')], \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда сразу получается неравенство (3); но неравенство (3) может выполняться и тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial y}$ не существует всюду; например, функция от y, равная $|y|$, не имеет производной при $y = 0$, а между тем всегда имеет место неравенство:

$$\big| |y'| - |y''| \big| \leqslant |y' - y''|,$$

т. е. выполнено условие (3), в котором $N = 1$.

Примечание 2. Для заданной функции $f(x, y)$ значение постоянного M, являющегося максимумом $|f(x, y)|$, а также наименьшее значение постоянного N, входящего в условие Липшица, зависят от рассматриваемой области; если область R_1 содержит R, то соответствующие первой области величины M_1 и N_1 связаны с величинами M и N, которые соответствуют области R, неравенствами $M_1 \geqslant M$, $N_1 \geqslant N$. Например, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$, рассматриваемая во всей плоскости $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, является неограниченной и не удовлетворяет условию Липшица; если же мы будем рассматривать её в области R, $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, то постоянное M окажется равным $a^2 + b^2$; в качестве же постоянного N следует взять максимальную величину $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ в области R, т. е. $2b$.

В этих предположениях мы докажем, что *существует единственное решение дифференциального уравнения* (1) $y = \varphi(x)$, *определённое и непрерывное для значений x в интервале $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$* (где h есть наименьшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$), *принимающее при $x = x_0$ значение x_0*.

Доказательство существования решения. Построим последовательность «приближений» к искомому решению. Легко

видеть, что уравнение (1) с начальными условиями эквивалентно следующему *интегральному уравнению*, где y — опять неизвестная функция:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{4}$$

Это интегральное уравнение мы и будем решать последовательными приближениями.

За нулевое приближение возьмём постоянное число y_0. Определим первое приближение $y_1(x)$ следующей формулой:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx. \tag{5_1}$$

Так как функция под знаком интеграла известна, то y_1 вычисляется квадратурой; очевидно, при $x = x_0$ имеем $y_1 = y_0$, т. е. первое приближение удовлетворяет начальному условию.

Если мы ограничим в формуле (5_1) изменение x, требуя, чтобы $|x - x_0| \leqslant h$ (см. выше условия теоремы), то, так как $h \leqslant a$, значения аргументов функции f, т. е. x и y_0, будут принадлежать области R, в которой $|f(x, y)| \leqslant M$; следовательно, мы из формулы (5_1) получим неравенство:

$$|y_1 - y_0| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh;$$

но так как $h \leqslant \frac{b}{M}$, то последнее неравенство показывает, что, при указанном ограничении изменения x, также и y_1 не выйдет из области R.

Строим второе приближение $y_2(x)$:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx. \tag{5_2}$$

Под знаком интеграла опять стоит известная функция (так как y_1 уже определено); далее, очевидно, $y_2(x_0) = y_0$, т. е. выполняется начальное условие; затем, так как при $|x - x_0| \leqslant h$ аргументы функции $f(x, y_1)$ не выходят из области R, где $f(x, y)$ определена и удовлетворяет условию (2), мы будем иметь неравенства:

$$|y_2 - y_0| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

которые показывают, что y_2 также не выйдет из области R. Вообще, после того как определено $(n-1)$-е приближение, мы определим n-е приближение формулой:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx, \tag{5_n}$$

откуда, допуская, что значения y_{n-1} при изменении x в интервале $|x-x_0| \leqslant h$ не выходят из области R и, следовательно, $|f(x, y_{n-1})| \leqslant M$, получим для y_n неравенство:

$$|y_n - y_0| \leqslant M|x - x_0|,$$

которое показывает, что если $|x-x_0| \leqslant h$, то $|y_n - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$, т. е. n-е приближение также не выходит из той же области. Таким образом, методом полной индукции доказано, что *ни одно из последовательных приближений не выйдет из области R, если*

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h.$$

Теперь нужно показать, что существует предел последовательности y_n,

$$Y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x), \tag{6}$$

и что предельная функция удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям. Для того чтобы показать существование предела (6) последовательности $\{y_n\}$, достаточно доказать сходимость ряда:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots; \tag{7}$$

в самом деле, n-я частная сумма этого ряда $S_n = y_n$, и если мы докажем, что ряд (7) сходится к функции $Y(x)$, то этим самым и будет доказано соотношение (6).

Оценим абсолютные величины членов ряда (7):

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \leqslant M|x - x_0|; \tag{8_1}$$

далее,

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1) - f(x, y_0)\}\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)|\,dx\right|.$$

На основании условия Липшица В) подинтегральная функция удовлетворяет неравенству $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leqslant N|y_1 - y_0|$; подставляя сюда только что найденную оценку для $|y_1 - y_0|$, находим:

$$|y_2 - y_1| \leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} M|x - x_0|\,dx\right| = \frac{MN}{1 \cdot 2}|x - x_0|^2. \tag{8_2}$$

Аналогично получим:

$$|y_3-y_2| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_2)-f(x, y_1)|\, dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} N|y_2-y_1|\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MN^2}{1\cdot 2}\left|\int_{x_0}^{x} (x-x_0)^2\, dx\right|,$$

и, наконец,

$$|y_3-y_2| \leqslant \frac{MN^2}{3!}|x-x_0|^3. \tag{8_3}$$

Докажем, что для любого целого положительного n справедливо неравенство:

$$|y_n-y_{n-1}| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n. \tag{8_n}$$

Для этого применим метод полной индукции: допустив, что неравенство (8_n) справедливо для n, докажем его справедливость для $n+1$. Мы имеем:

$$|y_{n+1}-y_n| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n)-f(x, y_{n-1})|\, dx\right| \leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |y_n-y_{n-1}|\, dx\right|$$

(последнее неравенство получаем на основании условия Липшица). Подставив в последний интеграл вместо $|y_n-y_{n-1}|$ выражение (8_n) (отчего неравенство усилится), получаем:

$$|y_{n+1}-y_n| \leqslant N\cdot\frac{MN^{n-1}}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} |x-x_0|^n\, dx\right| = \frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

т. е. неравенство (8_n) справедливо и для $n+1$. А так как оно оправдывается для $n=2$ и $n=3$, то оно верно для каждого натурального числа n. Заменяя ещё $|x-x_0|$ его наибольшим допустимым значением h, мы приходим к заключению, что каждый член ряда (7) (если не обращать внимания на первый член y_0) меньше соответствующего члена числового ряда с положительными членами:

$$Mh+M\frac{Nh^2}{2!}+M\frac{N^2h^3}{3!}+\ldots+M\frac{N^{n-1}h^n}{n!}+\ldots \tag{9}$$

Применяя к последнему ряду признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{MN^nh^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!MN^{n-1}h^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{Nh}{n+1} = 0 < 1.$$

Итак, ряд (9) сходится. Так как все члены ряда (7) по абсолютной величине меньше членов ч и с л о в о г о р я д а (9), то ряд (7) не

только сходится, но, в силу критерия Вейерштрасса, сходится равномерно для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0| \leqslant h$. Каждый член ряда (7) есть непрерывная функция от x, потому что интеграл есть непрерывная функция верхнего предела. Следовательно,

$$Y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

существует и является непрерывной функцией от x.

Докажем, что полученная таким образом функция $Y(x)$ удовлетворяет данному уравнению [очевидно, что начальное условие удовлетворено, так как $Y(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_0) = y_0$].

Возьмём равенство (5_n):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx$$

и перейдём к пределу при $n \to \infty$.

Благодаря равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ по y в области R мы для любого наперёд заданного положительного числа ε можем найти такое $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$$

будет выполнено для тех пар точек (x, y') и (x, y'') области R, для которых выполняется неравенство $|y' - y''| < \delta$ $\left(\text{в силу условия Липшица достаточно взять } \delta = \frac{\varepsilon}{N}\right)$. Далее, из равномерности стремления последовательности y_n к пределу вытекает возможность для выбранного δ так подобрать натуральное число n_0, чтобы при $n-1 > n_0$ для всех значений x в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имело место неравенство:

$$|y_{n-1}(x) - Y(x)| < \delta.$$

Сопоставляя оба эти неравенства, мы получаем при $n - 1 > n_0$:

$$|f[x, y_{n-1}(x)] - f[x, Y(x)]| < \varepsilon.$$

Отсюда следует:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)|\,dx\right| < \varepsilon h.$$

Пользуясь произволом числа ε, находим:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx.$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (5_n) при $n \to \infty$, получаем тождество:

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx, \tag{10}$$

т. е. *функция* $Y(x)$ *удовлетворяет интегральному уравнению* (4). Далее, функция Y допускает производную по x, так как в правой части тождества (10) стоит интеграл от непрерывной функции, допускающий производную по верхнему пределу. Дифференцируя (10), получаем:

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y),$$

т. е. $Y(x)$ *удовлетворяет данному уравнению* (1). Первая часть теоремы доказана.

Примечание 1. В ходе доказательства мы заменили дифференциальное уравнение (1) интегральным уравнением (4); очевидна цель такой замены: условия равномерной сходимости для последовательности интегралов значительно проще, чем для последовательности производных.

Примечание 2. Доказательство существования решения дифференциального уравнения (1) проведено нами методом последовательных приближений в предположении, что правая часть уравнения удовлетворяет условию Липшица по переменному y. При помощи других методов можно доказать теорему существования в более общих предположениях: именно, для существования решения достаточно потребовать только непрерывности функции $f(x, y)$ по обоим аргументам. Однако, если не подчинить $f(x, y)$ добавочным условиям, то начальные значения, вообще говоря, будут определять не одно решение, т. е. теорема единственности не будет иметь места (см. ниже п. **5**, теорема Пеано).

2. Докажем теперь единственность найденного решения, удовлетворяющего начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Допустим, что существует, кроме решения $Y(x)$, ещё другое решение $Z(x)$, удовлетворяющее тому же начальному условию: $Z(x_0) = y_0$. Без ограничения общности можно предположить, что значения x, для которых $Y(x) \neq Z(x)$, находятся вправо от x_0 в любой близости от точки x_0 [иначе за точку x_0 мы взяли бы ту точку, в любой близости которой значения $Y(x)$ и $Z(x)$ перестают быть равными, или заменили бы x на $-x$].

Покажем, что наше допущение приводит к противоречию. Возьмём некоторое малое постоянное число $\varepsilon > 0$; по предположению, в замкнутом интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$ не всюду $Y = Z$; следовательно, положительная функция $|Y(x) - Z(x)|$ достигает в этом интервале в некоторой точке ξ своего наибольшего значения $\theta > 0$, причём не

может быть $\xi = x_0$, так как при $x = x_0$ обе функции Y и Z равны между собой. Мы имеем:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx, \quad Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Z)\,dx.$$

Вычтем оба тождества одно из другого, придавая x значение ξ и используя при оценке разности условие Липшица:

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \theta \leqslant \int_{x_0}^{\xi} |f(x, Y) - f(x, Z)|\,dx \leqslant N \int_{x_0}^{\xi} |Y(x) - Z(x)|\,dx.$$

Мы только усилим последнее неравенство, если под интегралом заменим разность $|Y(x) - Z(x)|$ её наибольшим значением θ и если интеграл распространим на промежуток $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ вместо промежутка (x_0, ξ). Получим $\theta < N\varepsilon\theta$, откуда, так как, по предложению, $\theta \neq 0$, находим, что $1 < N\varepsilon$, что противоречиво, так как ε можно выбрать сколь угодно малым, например $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Следовательно, допущение существования второго решения Z, удовлетворяющего тому же начальному условию, что Y, приводит к противоречию.

Таким образом, *при выполнении условий* A) *и* B) *существует единственное решение дифференциального уравнения* (1), *принимающее при* $x = x_0$ *значение* y_0. Теорема Коши доказана нами полностью.

3. Мы доказали существование решения только для промежутка

$$I: \qquad x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h.$$

Однако, если при этом мы не вышли из той области D, где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (и удовлетворяет условию Липшица), *найденное решение может быть продолжено*. В самом деле, пусть значение найденного решения при $x = x_0 + h$ есть $y_0^{(1)}$, причём точка с координатами $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_0^{(1)}$ лежит внутри области D, тогда можно найти прямоугольник R_1: $|x - x_0^{(1)}| \leqslant a_1$, $|y - y_0^{(1)}| \leqslant b_1$, который еще целиком лежит в области D[1]). Обозначая через M_1 максимум $|f(x, y)|$ в прямоугольнике R_1, примем за начальные значения $x_0^{(1)}$ и $y_0^{(1)}$; тогда мы можем, по доказанному, утверждать существование решения дифференциального уравнения (1) в интервале

$$I_1: \qquad x_0^{(1)} - h_1 \leqslant x \leqslant x_0^{(1)} + h_1,$$

[1]) По определению внутренней точки, она входит в область D вместе с некоторой своей окрестностью; за эту окрестность может быть принят достаточно малый прямоугольник.

где $h_1 = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M_1}\right)$; середина интервала I_1 совпадает с концом интервала I; в этой точке оба построенных нами решения принимают одно и то же значение $y_0^{(1)}$; следовательно, в силу свойства единственности, оба решения совпадают в общей части I и I_1. Но половина $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)}+h_1)$ интервала I_1 лежит вне I; мы скажем, что найденное решение в этой половине является *продолжением* ранее полученного в интервале I решения. Если значение решения при $x_0^{(1)}+h_1$ есть $y_0^{(2)}$ и точка с координатами $x_0^{(2)}=x_0^{(1)}+h_1$, $y_0^{(2)}$ ещё лежит внутри области D, то мы можем определить решение по начальным данным $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$ в интервале I_2, который одной своей половиной перекрывается с I_1, и в этой общей части новое решение совпадает с предыдущим; во второй половине интервала I_2 мы получим продолжение рассматриваемого решения. Аналогичное построение может быть проведено и для убывающих значений x. Можно показать, что такими продолжениями можно подойти как угодно близко к границе области D.

В самом деле, пусть D_1 — любая ограниченная замкнутая область, лежащая вместе со своей границей внутри D. Мы покажем, что, применяя вышеописанный процесс «продолжения решения», мы дойдём до границы области D_1. В самом деле, так как D_1 не имеет общих точек с границей D, то наименьшее расстояние между точками этих замкнутых множеств $\geqslant d > 0$. (Если D совпадает со всей плоскостью xOy, то за d можно взять любое положительное число.) Если около каждой точки границы области D_1 опишем круг радиуса $\frac{d}{2}$ и замкнутую область, составленную из D_1 и площадей этих кругов, обозначим через D_2, то, очевидно, D_2 будет содержаться в D. Квадрат со стороной $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, и с центром в любой точке области D_1 будет лежать внутри D_2. В замкнутой области D_2 непрерывная функция $f(x, y)$ ограничена по абсолютной величине; пусть $|f(x, y)| \leqslant M_2$. Итак, для всех точек области D_1 мы можем принять $a=\frac{d\sqrt{2}}{4}$, $b=\frac{d\sqrt{2}}{4}$, $M=M_2$; тогда, в силу доказанного, интегральная кривая, проходящая через любую точку (x_0, y_0), лежащую в области D_1, будет определена в интервале (x_0-h_2, x_0+h_2), где $h_2=\min\left(\frac{d\sqrt{2}}{4}, \frac{d\sqrt{2}}{4M_2}\right)$. В силу ограниченности области D_1, мы, при продолжении интегральной кривой, путём конечного числа шагов дойдём до границы этой области.

Строя области $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, заключающие друг друга и стремящиеся в пределе к области D, мы, таким образом, достигаем любой близости границы D.

Пусть, в частности, область D совпадает со всей плоскостью xOy. Тогда в качестве областей $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ мы можем брать заключающие друг друга прямоугольники со сторонами неограниченно увеличивающихся размеров, параллельными координатным осям. При продолжении решения, определённого начальными данными (x_0, y_0), в сторону возрастающих значений x могут представиться два случая:

1) Как бы далеко вправо ни простирался прямоугольник D_n, можно взять его размеры в направлении Oy столь большими, что рассматриваемая интегральная кривая пересечёт при продолжении правую вертикальную сторону

прямоугольника D_n. Решение будет, таким образом, определено для сколь угодно больших положительных значений x, т. е. интервал оси Ox, для которого определено решение $y = \varphi(x)$, простирается до $+\infty$.

2) Найдутся такие значения $x = \overline{x}$, что сколь бы большой в направлении оси Oy прямоугольник D_n мы ни взяли (уравнение правой стороны которого есть $x = \overline{x}$), интегральная кривая при продолжении в направлении возрастания x выйдет из $D_{\underline{n}}$ через верхнюю или нижнюю сторону. Пусть $\overline{X}$ есть нижняя грань чисел $\overline{x}$, обладающих указанным свойством. В силу определения нижней грани, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся прямоугольник D_n достаточных размеров в направлении Oy, такой, что интегральная кривая пересечёт прямую $x = \overline{X} - \varepsilon$, т. е. решение $y = \varphi(x)$ определено для всех значений $x < X$. С другой стороны, для значений $x > \overline{X}$ наше решение не может быть продолжено; при этом при приближении x к X слева $|\varphi(x)|$ не может оставаться ограниченной. Мы докажем, что в этом случае

$$\lim_{\substack{x<\overline{X}\\ x\to\overline{X}}} \varphi(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x<\overline{X}\\ x\to\overline{X}}} \varphi(x) = -\infty.$$

В самом деле, если допустить обратное, то $\varphi(x)$ не стремилось бы при $x \to \overline{X}$ ни к какому пределу, и нашлись бы два числа A, B $(B > A)$ такие, что $\varphi(x)$ бесчисленное множество раз в интервале $(\overline{X} - \varepsilon, \overline{X})$ принимала бы значения, меньшие A, и значения, превышающие B ($\varepsilon > 0$ — любое малое число). В силу непрерывности $\varphi(x)$ при $x < \overline{X}$ (непрерывная функция принимает все промежуточные значения), нашлась бы последовательность пар чисел (x'_n, x''_n), $x'_1 < x''_1 < x'_2 < x''_2 < \ldots < x'_n < x''_n < \ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = \overline{X}, \tag{α}$$

и

$$\varphi(x'_n) = A, \quad \varphi(x''_n) = B, \quad A < \varphi(x) < B \text{ при } x'_n < x < x''_n.$$

По теореме конечных приращений имеем:

$$\frac{\varphi(x''_n) - \varphi(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \frac{B - A}{x''_n - x'_n} = \varphi'(\xi_n), \tag{β}$$

где ξ_n лежит между x'_n и x''_n. Пусть $\varphi(\xi_n) = \eta_n$; тогда $A < \eta_n < B$, и точка (ξ, η_n) лежит внутри прямоугольника $\overline{R}$, ограниченного прямыми $x = \overline{X} - \varepsilon$, $x = \overline{X}$; $y = A$, $y = B$. Согласно дифференциальному уравнению (1),

$$\varphi'(\xi_n) = f(\xi_n, \eta_n). \tag{γ}$$

В силу условий (α), мы можем выбрать n таким большим, чтобы было $x''_n - x'_n < \frac{B - A}{M}$, M — сколь угодно большое положительное число; тогда равенства (β) и (γ) дают:

$$f(\xi_n, \eta_n) > M.$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ оказывается неограниченной в замкнутом прямоугольнике $\overline{R}$, что противоречит предположению о её непрерывности во всей плоскости. Наше утверждение доказано.

Резюмируя, мы можем высказать следующую теорему: *если $f(x, y)$ определена и непрерывна во всей плоскости и удовлетворяет условию Липшица во всякой ограниченной области этой плоскости, то всякая интегральная кривая при возрастании x или неограниченно продолжаема до $x = +\infty$, или имеет вертикальную асимптоту при конечном значении $x = \overline{x}$.*

Аналогичное заключение справедливо для интегральной кривой при убывании x.

Простейший пример, осуществляющий случай 2, представляет уравнение $y' = y^2 + 1$; его решение, определённое начальными значениями (0, 0), есть $y = \operatorname{tg} x$; интегральная кривая имеет вертикальные асимптоты при $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

4. Теорема Коши доказывает существование (и единственность) частного решения, определённого начальными условиями. Но легко получить из неё построение общего решения, по крайней мере в некоторой ограниченной области.

Возьмём, как и в предыдущих рассуждениях, область R; $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$. Предполагая попрежнему начальное значение x_0 постоянным, будем считать начальное значение $\overline{y}_0$ искомой функции параметром, который может принимать всевозможные значения в некотором промежутке, например в интервале $\left(y_0 - \frac{b}{2},\ y_0 + \frac{b}{2}\right)$. Тогда, при любом выборе $\overline{y}_0$ в указанном интервале, переменное y не выйдет из области R, если ограничить его изменение неравенствами:

$$\overline{y}_0 - \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \overline{y}_0 + \frac{b}{2}.$$

Поэтому для всех рассматриваемых начальных значений $(x_0, \overline{y}_0)$ решения уравнения (1) будут существовать при изменении x в интервале $(x_0 - h',\ x_0 + h')$, где $h' = \min\left(a, \frac{b}{2M}\right)$. Таким образом, мы получили зависящее от одного параметра семейство решений:

$$y = \varphi(x, \overline{y}_0), \tag{11}$$

т. е. общее решение.

Формулы, дающие последовательные приближения $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n, \ldots$, показывают, что эти приближения суть непрерывные функции от начального значения, которое в рассматриваемом случае есть $\overline{y}_0$; следовательно, и *решение* (11), как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, *является непрерывной функцией параметра* $\overline{y}_0$.

Будем далее рассматривать оба начальных значения $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$ как переменные параметры, ограничив их изменение некоторой областью R',

расположенной внутри R, например $|\overline{x}_0-x_0|\leqslant\frac{h}{4}$, $|\overline{y}_0-y_0|\leqslant\frac{b}{2}$; тогда совокупность решений уравнения (1), соответствующих начальным данным $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, будет определена, во всяком случае, для $|x-\overline{x}_0|\leqslant\frac{h}{4}$. Эти решения выразятся формулой:

$$y=\Phi(x,\ \overline{x}_0,\ \overline{y}_0). \tag{12}$$

Из соображений, аналогичных предыдущим, следует, что функция в правой части равенства (12) непрерывна по отношению к переменным x, $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$.

Если мы возьмём теперь, в качестве начальной, полученную по формуле (12) точку (x, y), принадлежащую области R', то придём вдоль интегральной кривой, в силу единственности, обратно в точку $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$. Так как в этой формуле функция Φ характеризует зависимость значения функции от значения аргумента и от начальных параметров для всей области R', то мы вправе написать:

$$\overline{y}_0=\Phi(\overline{x}_0;\ x,\ y),$$

или, рассматривая в этом равенстве опять $\overline{x}_0$ как постоянное число, а $\overline{y}_0$ как переменный параметр (произвольное постоянное), получим соотношение вида:

$$\psi(x,\ y)=C, \tag{12$_1$}$$

связывающее координаты (x, y) переменной точки интегральной кривой, т. е. получим *общий интеграл уравнения* (1), разрешённый относительно произвольного постоянного.

Примечание. Нам придётся в дальнейшем дифференцировать левую часть равенства (12_1) по x и y; для законности этой операции достаточно показать, что решение (12) дифференциального уравнения (1) есть дифференцируемая функция от начальных значений. Доказательство этого факта, ввиду его сложности, мы дадим лишь в главе VII.

5. Доказательство существования решения дифференциального уравнения с непрерывной правой частью. Если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1}$$

на функцию $f(x, y)$ наложено только требование непрерывности по отношению к совокупности аргументов x, y, то можно доказать существование по крайней мере одного решения с начальными данными x_0, y_0. Первое доказательство этой теоремы принадлежит Пеано.

ТЕОРЕМА ПЕАНО. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$. Обозначим через M максимум $|f(x,y)|$ в этой области и через h наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$. Тогда в интервале $|x-x_0|\leqslant h$ существует по крайней мере одно решение уравнения* (1), *$y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию: $\varphi(x_0)=y_0$.*

Для доказательства этой теоремы мы применим теорему Арцела. Введём предварительно следующие определения. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{A}$$

называется ***равномерно ограниченной*** на замкнутом интервале (a, b), если существует положительное постоянное M такое, что для всех натуральных n и для $a \leqslant x \leqslant b$ имеет место неравенство:

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

Последовательность (A) непрерывных в замкнутом интервале (a, b) функций называется ***равностепенно непрерывной***, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|x' - x''| < \delta$ выполняется для всех n неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА. *Из всякой последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Возьмём на интервале (a, b) счётную, всюду плотную последовательность точек $\{x_n\}$, например по такому закону:

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2},\quad x_2 = a + \frac{b-a}{4},\quad x_3 = a + 3\,\frac{b-a}{4},\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_{2^k} = a + \frac{b-a}{2^{k+1}},\quad x_{2^k+1} = a + 3\frac{b-a}{2^{k+1}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_{2^{k+1}-1} = a + (2^{k+1}-1)\frac{b-a}{2^{k+1}},\ \ldots$$

Рассмотрим теперь множество чисел $\{f_n(x_1)\}$. В силу равномерной ограниченности последовательности (A), значения $f_n(x_1)$ все расположены на конечном интервале $(-M, +M)$ и, следовательно, имеют по крайней мере одну предельную точку. Поэтому из последовательности чисел $\{f_n(x_1)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1}(x_1),\ f_{n_2}(x_1),\ \ldots,\ f_{n_k}(x_1),\ \ldots,\ 1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Перенумеруем заново соответствующие функции, полагая $f_{n_k}(x) = f_k^{(1)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что $n_k \geqslant k$. Последовательность функций

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(1)}(x),\ldots \tag{A$_1$}$$

обладает тем свойством, что их значения в точке x_1 образуют сходящуюся последовательность.

Рассмотрим, далее, значения, принимаемые последовательностью (A$_1$) в точке x_2, т. е. $f_1^{(1)}(x_2), f_2^{(1)}(x_2), \ldots, f_n^{(1)}(x_2), \ldots$ Числа этой последовательности опять все заключены между $-M$ и $+M$; следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность

$$f_{n'_1}^{(1)}(x),\ f_{n'_2}^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_{n'_k}^{(1)}(x),\ \ldots$$

Перенумеруем заново подпоследовательность соответствующих функций, полагая $f_{n_k'}^{(1)}(x) = f_k^{(2)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Итак, мы получим подпоследовательность:

$$f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(2)}(x),\ \ldots \tag{A$_2$}$$

Заметим, что так как новая последовательность составляет часть последовательности (A_1), а эта последняя — часть последовательности (A), то функция $f_k^{(2)}(x)$ в первоначальной последовательности (A) имеет номер $\geqslant k$. Продолжая тот же процесс неограниченно, мы получим на m-м шаге подпоследовательность:

$$f_1^{(m)}(x),\ f_2^{(m)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(m)}(x),\ \ldots, \qquad (A_m)$$

определённую тем свойством, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x_m)$. Заметим, что так как последовательность (A_m) является частью последовательностей (A_{m-1}), (A_{m-2}), ..., (A_1), то для неё существуют также пределы:

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x_i), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Далее, так как последовательность (A_m) является частью последовательности (A) и при перенумерации порядок членов не нарушается, то функция $f_k^{(m)}(x)$ имеет в первоначальной нумерации (A) номер $\geqslant k$.

Составляем теперь из последовательностей (A_m) «диагональную» последовательность:

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(n)}(x),\ \ldots \qquad (B)$$

Последовательность (B) сходится в любой точке x_p ($p=1, 2, 3, \ldots$), так как все её члены, начиная с индекса p, принадлежат последовательности (A_p), которая сходится при $x=x_p$. Номера индексов функций последовательности (B) в первоначальной последовательности стремятся к ∞, так как функция $f_n^{(n)}(x)$ в первоначальной последовательности (A) имела номер $\geqslant n$.

Утверждаем, что последовательность (B) сходится равномерно во всём замкнутом интервале (a, b). В самом деле, зададим произвольное $\varepsilon>0$. В силу равностепенной непрерывности последовательности (B), существует такое $\delta>0$, что для любой функции этой последовательности неравенство $|x'-x''|<\delta$ влечёт за собой $|f_n^{(n)}(x')-f_n^{(n)}(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$. Далее, выбираем такое натуральное P, чтобы длина наибольшего интервала между точками a, b, x_1, x_2, ..., x_P была меньше найденного δ. Наконец, выбираем N так, чтобы имели место неравенства:

$$|f_{n+m}^{(n+m)}(x_i)-f_n^{(n)}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ для } n\geqslant N,\ m\geqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ P.$$

Пусть теперь x — любая точка замкнутого интервала (a, b). В силу выбора числа P, найдётся точка x_r, $r\leqslant P$, такая, что $|x-x_r|<\delta$. Тогда мы получим:

$$|f_n^{(n)}(x)-f_{n+m}^{(n+m)}(x)|\leqslant|f_n^{(n)}(x)-f_n^{(n)}(x_r)|+|f_n^{(n)}(x_r)-f_{n+m}^{(n+m)}(x_r)|+$$
$$+|f_{n+m}^{(n+m)}(x_r)-f_{n+m}^{(n+m)}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отсюда, по критерию Коши, следует равномерная сходимость последовательности (B). Теорема Арцела доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы Пеано. Мы будем приближать искомую интегральную кривую при помощи ломаных линий. Для дальнейшего удобно выделить в виде леммы следующее, геометрически очевидное, предложение.

ЛЕММА. *Если $y=\varphi(x)$ есть функция, определённая на интервале (x_0, x_n), график которой изображается ломаной линией, причём угловые коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ последовательных звеньев с проекциями (x_0, x_1) (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n) все лежат между двумя числами $\varkappa$ и K, $\varkappa \leqslant k_i \leqslant K$, то для углового коэффициента k любой хорды, $k=\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}$, справедливо неравенство $\varkappa \leqslant k \leqslant K$.*

Доказательство. Пусть между точками x' и x'' находятся точки $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+l}$; тогда мы имеем:

$$\frac{\varphi(x_i)-\varphi(x')}{x_i-x'}=k_i, \quad \frac{\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=k_{i+1}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(x'')-\varphi(x_{i+l})}{x''-x_{i+l}}=k_{i+l+1}.$$

В силу свойства производных пропорций, отношение суммы предыдущих членов к сумме последующих лежит между наибольшим и наименьшим из чисел $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{i+l+1}$, т. е. между $\varkappa$ и K, что и доказывает лемму.

При доказательстве теоремы Пеано ограничимся рассмотрением интервала (x_0, x_0+h); для интервала (x_0-h, x_0) построение и доказательство аналогичны. Обозначим через D замкнутую область $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$, $|y-y_0| \leqslant b$. Ломаную $y=\varphi_n(x)$, представляющую n-е приближение интегральной кривой, строим следующим образом. Делим отрезок (x_0, x_0+h) на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=x_0+h$. В интервале (x_0, x_1) определим $\varphi_n(x)$ как ординату прямой, проходящей через начальную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$:

$$\varphi_n(x)=y_0+(x-x_0)f(x_0, y_0), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Значение, принимаемое этой функцией при $x=x_1$, обозначим через y_1:

$$y_1=y_0+(x_1-x_0)f(x_0, y_0).$$

Построенный отрезок весь лежит в области D, так как $|y-y_0| \leqslant M(x-x_0) \leqslant Mh \leqslant b$. В интервале (x_1, x_2) определяем $\varphi_n(x)$ как ординату прямой, проходящей через (x_1, y_1) с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$:

$$\varphi_n(x)=y_1+(x-x_1)f(x_1, y_1), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Обозначаем

$$y_2=y_1+(x_2-x_1)f(x_1, y_1).$$

Легко убедиться, что построенное звено лежит в области D. Вообще, если при $x=x_k$ мы получили $\varphi_n(x_k)=y_k$, то в интервале (x_k, x_{k+1}) функция $\varphi_n(x)$ определяется уравнением:

$$\varphi_n(x)=y_k+(x-x_k)f(x_k, y_k), \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}.$$

Построив, таким образом, ломаную $y=\varphi_n(x)$ во всём промежутке (x_0, x_0+h), мы убеждаемся в том, что она целиком лежит в области D, так как, в силу леммы, мы имеем для $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$:

$$|\varphi_n(x)-y_0|=|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)| \leqslant M(x-x_0) \leqslant Mh.$$

Давая n значения 1, 2, 3, ..., мы получаем последовательность функций:

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots \qquad \text{(C)}$$

Эти функции равномерно ограничены в интервале (x_0, x_0+h); в самом деле,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |y_0|+Mh$$

для любого n. Далее, эти функции равностепенно непрерывны, так как все угловые коэффициенты любой функции ограничены числами $-M$ и $+M$; в силу леммы, имеем для любых x', x'', содержащихся в интервале (x_0, x_0+h),

$$|\varphi_n(x'')-\varphi_n(x')| \leqslant M|x''-x'|;$$

следовательно, если для $\varepsilon>0$ взять $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, то из неравенства $|x'-x''|<\delta$ для всякого n будем иметь:

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon.$$

По теореме Арцела, из последовательности (C) можно выбрать равномерно сходящуюся на интервале (x_0, x_0+h) подпоследовательность:

$$\varphi_{n_1}(x),\ \varphi_{n_2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{n_k}(x),\ \ldots \qquad (C')$$

Пусть предельная функция подпоследовательности (C′) будет $\varphi(x)$. Мы докажем, что $y=\varphi(x)$ является искомым решением дифференциального уравнения (1). В самом деле, во-первых, мы имеем по построению $\varphi_n(x_0)=y_0$; следовательно, $\varphi(x_0)=y_0$. Докажем затем, что при $x=\bar{x}$, где $\bar{x}$ — любая точка интервала (x_0, x_0+h), $\varphi(x)$ имеет производную, равную $f(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$. Пусть задано произвольное $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ найдётся область D_1, $|x-\bar{x}|\leqslant\delta$, $|y-\bar{y}|\leqslant\delta$, для каждой точки (x, y) которой выполняется неравенство:

$$|f(x, y)-f(\bar{x}, \bar{y})|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $h_1=\min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M}\right)$. Возьмём приращение Δx, удовлетворяющее неравенствам $0\leqslant|\Delta x|<h_1$, и будем рассматривать его как постоянное. Выберем N_1 таким, чтобы при $k\geqslant N_1$ имело место неравенство:

$$|\varphi(x)-\varphi_{n_k}(x)|<\frac{\delta}{4}$$

[этот выбор возможен вследствие равномерной сходимости последовательности (C′)] и чтобы расстояние между абсциссами угловых точек ломаных $y=\varphi_{n_k}(x)$ было меньше $\frac{h_1}{2}$ $\left(\text{это имеет место, если } n_k>\frac{2h}{h_1}\right)$. Оценим отношение

$$\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}.$$

В силу наших предположений, при $k>N_1$ все угловые точки ломаных $y=\varphi_{n_k}(x)$, звенья которых своими проекциями покрывают интервал между $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta x$, лежат внутри области D_1; в самом деле, ввиду выбора Δx, имеем для названного интервала:

$$|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})|=|\varphi(x)-\bar{y}|\leqslant h_1M<\frac{\delta}{2}, \quad |\varphi_{n_k}(x)-\bar{y}|<\frac{3\delta}{4}$$

[если приращение $\Delta x<0$, то левая часть интервала $(\bar{x}+\Delta x, \bar{x})$ покрыта проекцией звена (x_i, x_{i+1}), где $x_i\leqslant\bar{x}+\Delta x<x_{i+1}$; но так как $x_{i+1}-x_i<\frac{h_1}{2}$,

то $|\varphi_{n_k}(x_i)-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)|<\frac{\delta}{4M}M=\frac{\delta}{4}$; таким образом, $|\varphi_{n_k}(x_i)-\bar{y}|<\delta$, $|x_i-\bar{x}|<h_1+\frac{h_1}{2}<\delta$]. Таким образом, все угловые коэффициенты отрезка ломаной между $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta x$ заключены между числами $f(\bar{x},\bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}$ и $f(\bar{x},\bar{y})+\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, в силу леммы, получаем:

$$f(\bar{x},\bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}<f(\bar{x},\bar{y})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Находим, далее, такое число $N_2>N_1$, чтобы при $k\geqslant N_2$ было

$$|\varphi_{n_k}(x)-\varphi(x)|<|\Delta x|\frac{\varepsilon}{4}$$

(такой выбор возможен, так как последовательность (С) равномерно сходится). Наконец, оцениваем разность $\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}$. Имеем при $k\geqslant N_2$

$$\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}\right|+\left|\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)}{\Delta x}\right|+\left|\frac{\varphi(\bar{x})-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Полученное неравенство

$$\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|<\varepsilon,$$

справедливое для достаточно малого Δx, показывает, что производная от $\varphi(x)$ в точке $\bar{x}$ существует и равна $f(\bar{x},\bar{y})$. Так как $\bar{x}$ была произвольная точка отрезка (x_0, x_0+h), мы имеем для всякого x, $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$,

$$\varphi'(x)=f(x,y).$$

Теорема доказана.

Заметим ещё раз, что без дополнительных ограничений на функцию $f(x, y)$ (например, условия Липшица) нельзя доказать единственности полученного решения.

Пример 1. Уравнение $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$.

Начальные значения: $x=0$, $y=0$; область R: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$. В этой области $|f(x,y)|\leqslant 2$, т. е. $M=2$. За h надо взять наименьшее из чисел $a=1$, $\frac{b}{M}=\frac{1}{2}$, т. е. $h=\frac{1}{2}$. Последовательные приближения будут,

во всяком случае, сходиться при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Составляем их:

$$y_0 = 0,$$

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + y_0^2)\, dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + y_1^2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2 + y_2^2)\, dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59\,535}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ имеем $y_2 = 0{,}04179$, и в пределах пяти знаков y_3 не даёт лучшей точности.

6. Метод последовательных приближений может быть применён и в комплексной области. Пусть дано уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ теперь уже аналитическая функция двух комплексных переменных в области

$$|x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < \rho$$

и непрерывная, когда x и y находятся на соответствующих окружностях.

Пусть в этой области $|f(x, y)| \leqslant M$. Требуется найти решение уравнения (1), в котором y есть аналитическая функция x, принимающая при $x = x_0$ значение y_0. Обозначим:

$$R = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right).$$

Тогда мы можем утверждать: *существует решение уравнения* (1), *голоморфное в круге*:

$$|x - x_0| < R. \tag{A}$$

Для доказательства заметим, что мы и в настоящем случае можем заменять наше дифференциальное уравнение интегральным:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)\, dx, \tag{13}$$

где интеграл (не зависящий от пути интеграции) может быть взят по любой простой дуге, соединяющей точки x_0 и x_1 и не выходящей из круга $|x - x_0| < R$,

в частности по прямолинейному отрезку $\overline{x_0 x}$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Все оценки § 1, п. 1 остаются справедливыми (с заменой h на R и b на ρ), причём $y_0(x)$ будет оставаться при $|x| \leqslant R$ и при любом n в круге $|y_n - y_0| \leqslant \rho$. Оценки (8) показывают, что ряд (7) из аналитических функций от x равномерно сходится при $|x| \leqslant R$; следовательно, его сумма $y(x)$ представляет решение уравнения (1), голоморфное, в силу теоремы Вейерштрасса, в круге $|x - x_0| < R$, что и требовалось доказать.

Винтнер недавно заметил, что оценка (А) является наилучшей возможной для совокупности дифференциальных уравнений (1) в том смысле, что можно построить последовательность дифференциальных уравнений, для *которых истинный радиус голоморфизма для решения будет* сколь угодно близок к числу, определяемому формулой (А). Дадим пример такой последовательности:

$$\frac{dy}{dx} = \left(y + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

начальные значения $x = 0$, $y = 0$.

Принимаем в правой части то значение радикала, которое при $y = 0$ даёт действительное значение $2^{\frac{1}{m(m+1)}}$. Так как x явно не входит в уравнения, можно считать, что $r = \infty$; далее, бином $\left(y + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ голоморфен при $|y| < 2^{\frac{1}{m}}$ и непрерывен при $|y| = 2^{\frac{1}{m}}$; следовательно, $\rho = 2^{\frac{1}{m}}$. Наконец, максимум правой части при $|y| \leqslant 2^{\frac{1}{m}}$:

$$M = \left(2^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} = 2^{\frac{1}{m}},$$

откуда по формуле (А) $R = 1$ для всех уравнений последовательности. Фактически решение с начальными значениями $x = 0$, $y = 0$,

$$y = -2^{\frac{1}{m}} + \left[\frac{m}{m+1}\, x + 2^{\frac{1}{m+1}}\right]^{\frac{m+1}{m}}$$

голоморфно в круге $|x| < 2^{\frac{1}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m} = R_m$, причём $\lim\limits_{m \to \infty} R_m = 1$, то-есть при достаточно большом m истинный радиус круга голоморфизма сколь угодно близок к значению, которое даётся формулой (А).

ЗАДАЧА.

51. Найти методом последовательных приближений приближённые решения уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

(найти три приближения, не считая y_0), если:

а) Начальная точка $x = y = 0$, начальная область $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. В каком интервале гарантирована сходимость?

б) Начальные условия $x = 0$, $y = 1$; начальная область $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Чему равно h?) Найти три приближения.

§ 2. Особые точки.

1. Рассуждения предыдущего параграфа неприменимы, если условия A) и B) не выполнены. В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда не выполняется условие A). Допустим, что в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ является неограниченной. Могут представиться два случая:

Первый случай: $f(x, y) \to \infty$, когда $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Тогда функция $\frac{1}{f(x, y)}$ стремится к нулю. Примем её значение равным 0 в точке (x_0, y_0).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

и предположим, что для него условия теоремы Коши в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены; мы получим интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0); уравнение её будет иметь вид:

$$x = \varphi(y);$$

при $x = x_0$, $y = y_0$ имеем $\frac{dx}{dy} = 0$; таким образом, интегральная кривая имеет в точке (x_0, y_0) вертикальную касательную.

Для семейства интегральных кривых точка (x_0, y_0) никакими другими геометрическими особенностями обладать не будет.

Пример 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$; при $x = x_0$, $y = 0$ функция не ограничена, но в уравнении $\frac{dx}{dy} = y$ правая часть при этих начальных данных обращается в нуль.

Искомое решение: $y^2 = 2(x - x_0)$ — парабола с вертикальной касательной при $x = x_0$.

Второй случай: $f(x, y)$, являясь неограниченной в окрестности точки (x_0, y_0), не имеет единственного предела ∞, когда точка (x, y) стремится к (x_0, y_0), между тем как в остальных точках этой окрестности или $f(x, y)$ или $\frac{1}{f(x, y)}$ непрерывна. Такова, например, функция $\frac{ax + by}{cx + dy}$ в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. В самом деле, когда точка (x, y) стремится к $(0, 0)$, оставаясь на прямой $ax + by = 0$, эта функция равна 0; если же точка (x, y) лежит на прямой $cx + dy = 0$, функция не определена (нуль в знаменателе), но вблизи этой прямой она бесконечно велика; по другим направлениям функция имеет другие предельные значения. Мы скажем, что в точке $(0, 0)$ наша функция имеет изолированную особую точку типа $\frac{0}{0}$.

2. Разберём течение интегральных кривых в окрестности особой точки только что указанного типа для простого уравнения [1]):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}. \tag{14}$$

Мы предположим, что $ad - bc \neq 0$. При помощи линейной подстановки с постоянными коэффициентами и определителем, отличным от нуля,

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y, \tag{15}$$

преобразуем уравнение, стараясь подобрать постоянные α, β, γ, δ так, чтобы преобразованное уравнение имело наиболее простой вид, именно, чтобы в числителе нового уравнения был одночлен $\lambda\eta$, а в знаменателе — одночлен $\mu\xi$ (λ и μ — некоторые постоянные).

Из (15) мы получаем:

$$d\xi = \alpha\, dx + \beta\, dy, \quad d\eta = \gamma\, dx + \delta\, dy;$$

составляя производную $\frac{d\eta}{d\xi}$, заменяем в её выражении в числителе и знаменателе dx и dy через пропорциональные им, согласно (14), величины $cx + dy$ и $ax + by$. Получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(cx + dy) + \delta(ax + by)}{\alpha(cx + dy) + \beta(ax + by)}.$$

Мы ставили целью преобразования (15), чтобы числитель имел вид $\lambda\eta$, т. е. чтобы имело место тождество:

$$\gamma(cx + dy) + \delta(ax + by) = \lambda\eta = \lambda(\gamma x + \delta y).$$

Приравнивая в первой и последней частях этого тождества коэффициенты при x и y, получаем для определения γ и δ два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(c - \lambda) + \delta a = 0, \\ \gamma d + \delta(b - \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти два однородных линейных уравнения будут иметь не равные нулю решения только при условии, что определитель системы равен нулю, т. е. что

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & a \\ d & b - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ad = 0. \tag{17}$$

[1]) Уравнение (14) однородное, его можно проинтегрировать в элементарных функциях, но мы здесь дадим качественный анализ решений этого уравнения, ставя вопрос о течении всех кривых вблизи особой точки и не интересуясь конкретными численными значениями переменных вдоль каждой интегральной кривой.

Аналогично, приравнивая знаменатель правой части уравнения (15) выражению $\mu\xi$ и затем сравнивая в полученном тождестве коэффициенты при x и y, получим для α и β систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(c-\mu)+\beta a=0, \\ \alpha d+\beta(b-\mu)=0. \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Чтобы из этой системы получить не равные нулю значения α и β, опять мы должны потребовать равенство нулю определителя, т. е.

$$\mu^2-(b+c)\mu+bc-ad=0. \tag{17'}$$

Мы видим, что λ и μ должны быть корнями одного и того же уравнения (17) или (17').

Предположим сначала, что это уравнение имеет различные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Подставляя один из них, например λ_1, в уравнения (16), а другой, λ_2, в уравнения (16'), мы найдём из первой системы (с точностью до множителя пропорциональности) γ и δ, а из второй α и β. Легко убедиться в том, что определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

В самом деле, если, например, $a \neq 0$, то из первого из уравнений (16) имеем $\frac{\delta}{\gamma}=-\frac{c-\lambda_1}{a}$, а из первого из уравнений (16'): $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{c-\lambda_2}{a}$; следовательно

$$\frac{\delta}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\alpha},$$

т. е. $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. Итак, уравнение (14), при помощи подстановки (15), где α, β, γ, δ уже определены привелось к виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}. \tag{18}$$

Как известно из аналитической геометрии, геометрический смысл подстановки (15) (однородного аффинного преобразования) состоит в переходе от осей x, y к новым (вообще говоря, косоугольным) осям ξ и η и в преобразовании масштаба на каждой оси. Но так как нам важна общая качественная картина, мы не будем вычислять положения и масштабов новых осей и будем на наших чертежах изображать эти оси как прямоугольные.

Уравнение (18) легко интегрируется разделением переменных:

$$\frac{d\eta}{\eta}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\xi}{\xi},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \ln|\eta| &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln|\xi|+\ln|C|, \\ \eta &= C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

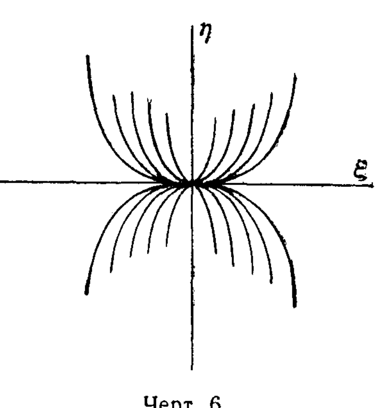
Исследуем решение (19) для разных случаев значений корней λ_1 и λ_2 уравнения (17).

1) Корни λ_1 и λ_2 действительны и одного знака. Можно без ограничения общности предположить, что $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Все интегральные кривые (19) проходят через начало координат $\xi = \eta = 0$; все они касаются в начале оси ξ, так как

$$\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} C \left.|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\right|_{\xi=0} = 0.$$

Но, кроме семейства (19), существует ещё интегральная кривая, проходящая через начало, которая соответствует решению $\xi = 0$ (как указано в § 2 главы I, в исследовании геометрической картины такие решения надо принимать во внимание).

Расположение кривых около начала имеет вид, показанный на черт. 6. Особая точка дифференциального уравнения с таким расположением интегральных кривых называется *узлом*. Через узел проходит бесконечное множество интегральных кривых.



Черт. 6.

Пример 3. $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi}$, $\eta = C\xi^2$. (Семейство парабол с вертикальными осями и с вершинами в особой точке, ось $O\xi$ $(\eta = 0)$ и решение $\xi = 0$ — ось $O\eta$).

2) Корни λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков. Тогда $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k < 0$. Интегральные кривые даются уравнением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -k\frac{\eta}{\xi};$$

его решение

$$\eta = C|\xi|^{-k}.$$

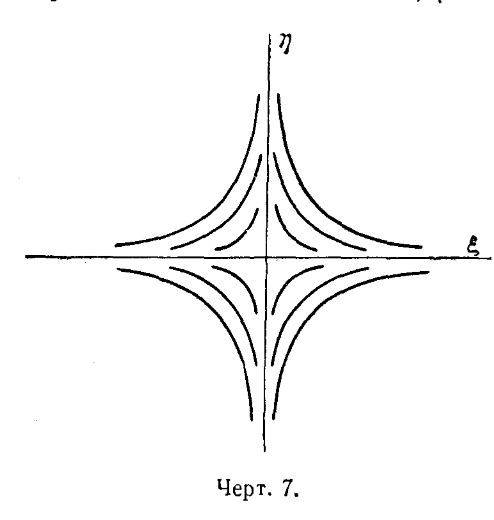
Два решения этого уравнения, проходящие через начало, суть $\xi = 0$, $\eta = 0$. Остальные интегральные кривые не проходят через особую точку; течение кривых показано на черт. 7. Особая точка такого типа называется *седловиной*.

Пример 4. $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi}$. Общий интеграл $\xi\eta = C$ (семейство гипербол, отнесённых к осям, и две асимптоты).

3) Корни λ_1 и λ_2 комплексные сопряжённые:

$$\lambda_1 = p + qi, \quad \lambda_2 = p - qi.$$

При определении коэффициентов γ, δ из уравнений (16) и α, β из уравнений (16′) можно так распорядиться постоянным множителем, который остаётся неопределённым, что γ и δ будут числа комплексные, сопряжённые соответственно с α, β. Обозначая комплексное сопряжённое с числом z через $\bar{z}$, мы получим подстановку:



Черт. 7.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Переменные ξ, η неудобны, так как принимают при действительных x, y комплексные (сопряжённые) значения; поэтому делаем ещё одну линейную замену переменных (с определителем $\neq 0$):

$$u = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad v = \frac{\xi - \eta}{2i},$$

или

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv.$$

Легко видеть, что u и v связаны аффинным преобразованием с x, y и что при действительных x, y переменные u, v также принимают действительные значения. Внося переменные u, v в уравнение (18), получим:

$$\frac{du - i\,dv}{du + i\,dv} = \frac{(p + qi)(u - iv)}{(p - qi)(u + iv)},$$

или

$$du\,(pv - qu) = dv\,(pu + qv). \quad (20)$$

Проще всего интегрировать уравнение (20) следующим образом: переписываем его в виде:

$$q\,(u\,du + v\,dv) = p\,(v\,du - u\,dv);$$

если разделить обе части на $u^2 + v^2$,

$$q\,\frac{u\,du + v\,dv}{u^2 + v^2} = p\,\frac{v\,du - u\,dv}{u^2 + v^2},$$

то мы, очевидно, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\,d\ln(u^2 + v^2) + \frac{p}{q}\,d\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = 0,$$

откуда

$$\ln \sqrt{u^2+v^2}+\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=\ln C,$$

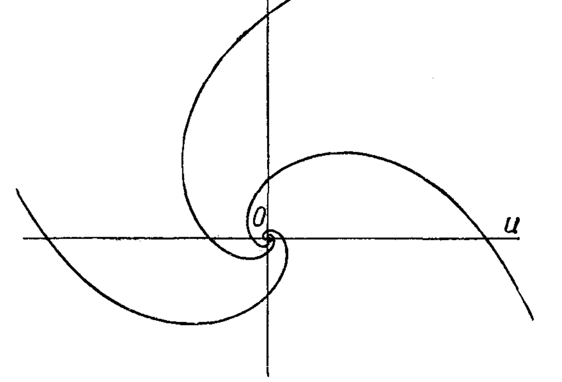
или

$$\sqrt{u^2+v^2}=Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}.$$

Наконец, вводя на плоскости u, v полярные координаты: $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, находим:

$$r=Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}.$$

Это — семейство логарифмических спиралей в плоскости u, v с асимптотической точкой в начале; все кривые примыкают к началу, но без определённой предельной касательной, — они делают около точки $(0, 0)$ бесконечное количество оборотов. Такая особая точка называется *фокусом*. Вид кривых в окрестности этой точки дан на черт. 8.



Черт. 8.

4) Корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые (сопряжённые): $\lambda_1=qi$, $\lambda_2=-qi$. Теми же преобразованиями, как и в случае 3), приходим к уравнению (20), в котором, однако, $p=0$, т. е. имеем:

$$u\,du+v\,dv=0.$$

Интегрируем:

$$u^2+v^2=C.$$

Семейство интегральных кривых есть семейство замкнутых кривых (кругов в координатах u, v), окружающих особую точку; через самую точку не проходит ни одной интегральной кривой. Такая точка называется *центром* (черт. 9).

Рассмотрим теперь случай равных (действительных) корней: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Тогда из уравнения (17) имеем:

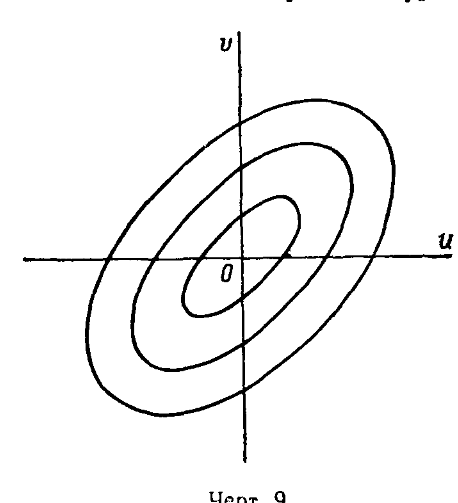
$$2\lambda=b+c, \quad \lambda=\frac{b+c}{2}.$$

Подставляя это значение в систему (16′), получим:

$$-\frac{b-c}{2}\alpha+a\beta=0, \quad \alpha d+\frac{b-c}{2}\beta=0. \qquad (16'')$$

Могут представиться два случая:

5) Не все коэффициенты при α и β в равенствах (16″) равны нулю. Тогда из уравнений (16″) только одно независимое, так как определитель равен $\frac{1}{4}[(b-c)^2+4ad]$, но выражение в квадратных скобках есть дискриминант уравнения (17), равный нулю, в силу условия равенства корней этого уравнения. При этом, согласно условию, хотя бы одно из равенств (16″) не есть тождество; пусть это будет первое; берём одно из его решений, например $\alpha=a$, $\beta=\frac{b-c}{2}$. Итак, мы можем ввести новое переменное



Черт. 9.

$$\xi=ax+\frac{b-c}{2}y. \quad (15')$$

Аналогичного преобразования для η мы не можем сделать, так как у нас получилось бы то же самое выражение (с точностью до постоянного множителя), и определитель подстановки был бы равен нулю. Поэтому за второе переменное мы возьмём

$$\eta=y. \quad (15'')$$

Определитель подстановки (15′), (15″) есть a; он не равен нулю. В самом деле, дискриминант уравнения (17)

$$D=(b+c)^2-4(bc-ad)=(b-c)^2+4ad$$

равен нулю (условие равенства корней); если $a=0$, то $b-c=0$, и первое уравнение (16″) есть тождество, против условия. Следовательно, формулы (15′), (15″) определяют аффинное преобразование.

Введём переменные ξ, η в уравнение (14). В формуле

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)},$$

в силу (15″), получаем $\gamma=0$, $\delta=1$, т. е. числитель равен $ax+by$. Что касается знаменателя, то выражение ξ в формуле (15′) подобрано так, чтобы он имел тот же вид, что и в (18), т. е. был равен $\lambda\xi$, где λ в данном случае есть кратный корень уравнения (17). Итак, получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{ax+by}{\lambda\xi},$$

Вводя в числитель переменные ξ, η, получим:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\frac{b+c}{2}\eta}{\lambda\xi}, \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda\eta}{\lambda\xi},$$

или, наконец,

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta}{\xi}+\frac{1}{\lambda}.$$

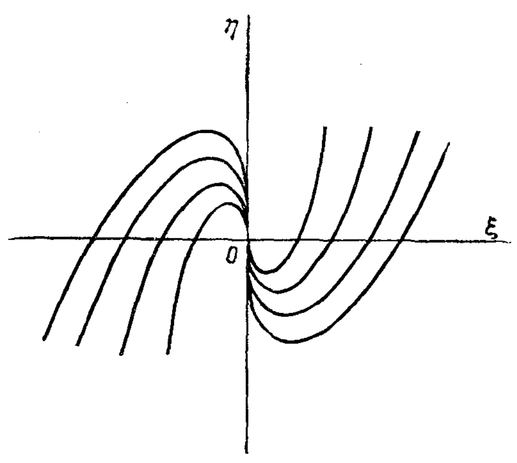
Это — однородное уравнение (оно также является линейным); его общее решение есть

$$\eta=\frac{1}{\lambda}\xi\ln\xi+C\xi.$$

Кроме того, имеем в качестве интегральной кривой $\xi=0$. Опять все кривые проходят через начало; угловой коэффициент их касательных в начале есть

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=\lim_{\Delta\xi\to 0}\left\{\frac{1}{\lambda}\ln|\Delta\xi|+C\right\}=\pm\infty,$$

где плюс или минус зависят от знака λ; все кривые имеют определённую касательную — ось $O\eta$. Это опять *узел* [он отличается от узла случая 1) тем, что там одна интегральная кривая имела касательную, отличную от всех остальных]. Форма кривых вблизи особой точки показана на черт. 10 (в предположении $\lambda>0$).



Черт. 10.

6) Все коэффициенты уравнений (16″) равны нулю, т. е. $a=d=0$, $b=c=\lambda$. Уравнение (14) имеет тогда следующий вид:

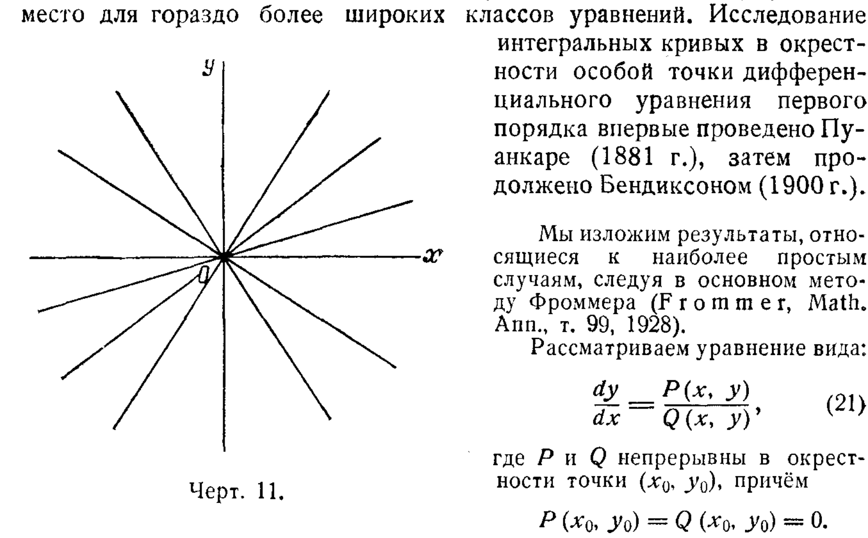
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Его общее решение:

$$y=Cx.$$

Опять все кривые проходят через начало с определённым направлением касательных, но, в противоположность предыдущим случаям, угловые коэффициенты этих касательных могут иметь всевозможные значения (черт. 11). Эта точка тоже называется *узлом* (*дикритический узел*).

3. Те типы распределения интегральных кривых, которые мы установили в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ для уравнения (13), имеют место для гораздо более широких классов уравнений. Исследование интегральных кривых в окрестности особой точки дифференциального уравнения первого порядка впервые проведено Пуанкаре (1881 г.), затем продолжено Бендиксоном (1900 г.).



Черт. 11.

Мы изложим результаты, относящиеся к наиболее простым случаям, следуя в основном методу Фроммера (Frommer, Math. Ann., т. 99, 1928).

Рассматриваем уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{21}$$

где P и Q непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), причём

$$P(x_0, y_0)=Q(x_0, y_0)=0.$$

Без ограничения общности можно предполагать особую точку расположенной в начале координат, так как общий случай всегда можно привести к этому путём введения новых переменных x', y':

$$x=x_0+x', \quad y=y_0+y'.$$

Предполагая, что такая замена уже произведена, и обозначая переменные снова через x, y, мы будем считать, что

$$P(0, 0)=Q(0, 0)=0. \tag{22}$$

Мы предположим, кроме того, что функции P и Q не имеют других общих нулей, кроме значения $x=0$, $y=0$, в некоторой окрестности начала и что они в этой окрестности [включая точку $(0, 0)$] имеют непрерывные частные производные по x и по y. В силу этих условий, в тех точках рассматриваемой окрестности, где $Q(x, y)\neq 0$, существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (21), определяемое этой точкой как начальной; в тех точках, где $Q(x, y)=0$, но $P(x, y)\neq 0$, существует единственное решение $x=\psi(y)$ уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{Q}{P}$; следовательно, в окрестности начала через каждую точку (кроме особой) проходит единственная интегральная кривая.

Из предположения непрерывности частных производных от $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ следует, что в окрестности точки $(0, 0)$ функции P и Q могут быть представлены в виде:

$$P(x, y)=ax+by+\varphi(x, y), \quad Q(x, y)=cx+dy+\psi(x, y), \tag{23}$$

где φ и ψ, при бесконечно малых первого порядка x и y, являются бесконечно малыми высшего порядка, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{24}$$

Условия (23) и (24), очевидно, выражают то обстоятельство, что P и Q допускают в точке (0, 0) полный дифференциал. В простейшем случае, когда P и Q — многочлены, φ и ψ будут не ниже второго порядка малости. Заметим, наконец, что из условия (24) следует, что все частные производные первого порядка от φ и ψ имеют в точке (0, 0) нулевые значения. В самом деле, мы получаем, например,

$$\varphi'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{\varphi(0, y)}{y} = 0, \quad \psi'_y(0, 0) = 0. \tag{24'}$$

Предполагая, что $ad - bc \neq 0$, попытаемся применить к уравнению (21) прежнюю линейную подстановку (15) с целью привести линейные члены в выражениях (23) к простейшему виду. Для определения коэффициентов подстановки мы снова приходим к уравнению (17). При этом мы можем пользоваться только подстановками с действительными коэффициентами, так как функции P и Q вообще не определены для мнимых значений аргументов. Рассмотрим в связи с этим отдельно различные случаи.

1) Корни уравнения (17) действительны, отличны от нуля и различны; пусть они будут λ_1 и λ_2. При помощи подстановки (15) с действительными коэффициентами и определителем, отличным от нуля, можно привести уравнение (21) к виду, где линейные члены функций P и Q будут $\lambda_1\eta$ и $\lambda_2\xi$. Вводя для новых переменных вместо ξ и η прежние обозначения x и y, мы приводим, таким образом, уравнение (21) к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 y + \varphi_1(x, y)}{\lambda_2 x + \psi_1(x, y)}, \tag{21'}$$

где φ_1 и ψ_1 получаются как линейные комбинации от φ и ψ с постоянными коэффициентами и с линейной заменой переменных, следовательно, также удовлетворяют предельным соотношениям (24).

Предположим, что уравнение (21) имеет интегральные кривые, приближающиеся к особой точке с определённым направлением касательной; пусть угловой коэффициент предельного положения этой касательной в начале координат есть k. Переписываем уравнение (21) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + b\frac{y}{x} + \frac{\varphi(x, y)}{x}}{c + d\frac{y}{x} + \frac{\psi(x, y)}{x}}.$$

Когда x стремится к нулю вдоль рассматриваемой интегральной кривой, то угловой коэффициент секущей $\frac{y}{x}$ имеет пределом k; в силу соотношений (24), $\frac{\varphi}{x}$ и $\frac{\psi}{x}$ стремятся к нулю, $\frac{dy}{dx}$, по условию, стремится к k. Таким образом, мы получаем для возможных значений k квадратное уравнение:

$$k = \frac{a + bk}{c + dk}, \tag{25}$$

или

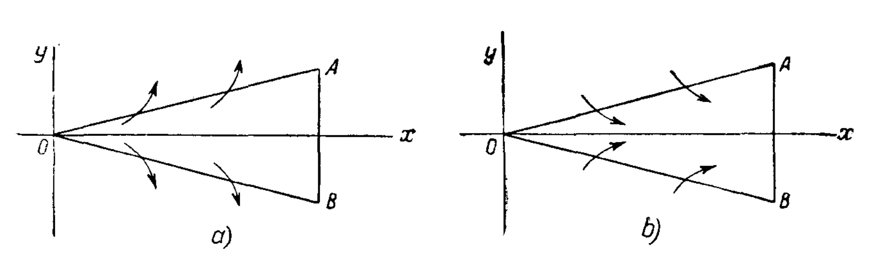
$$dk^2 + (c - b)k - a = 0. \tag{26}$$

Итак, в нашем случае для углового коэффициента k существует не более двух возможных значений. Условие действительности этих значений k, т. е. необходимое условие существования интегральных кривых, приближающихся к особой точке с определённой касательной, состоит в неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения (26):

$$(b-c)^2+4ad \geqslant 0.$$

Но это — то же условие, при выполнении которого корни уравнения (7) действительны. В нашем случае это условие выполнено со знаком $>$. Для уравнения в форме (21′), корни квадратного уравнения (26) обращаются соответственно в 0 и в ∞. Итак, интегральные кривые уравнения (21′), приближающиеся к началу координат с определённой касательной, должны касаться в начале или оси Ox или оси Oy.

Переходим к исследованию интегральных кривых сначала в окрестности оси Ox. Построим равнобедренный треугольник OAB (черт. 12) с биссектри-



Черт. 12.

сой, совпадающей с положительным направлением Ox, углом при вершине 2α и высотой h (числу α мы будем придавать значения между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а число h может быть выбрано сколь угодно малым). Рассмотрим направления поля $\frac{dy}{dx}$, определяемого уравнением (21′), на сторонах OA и OB и сравним эти направления с наклоном указанных сторон, который, очевидно, равен для каждой из них $\frac{y}{x}$. Для этого составляем разность:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{\lambda_1 y+\varphi_1}{\lambda_2 x+\psi_1}-\frac{y}{x}=$$

$$=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,yx+(x\varphi_1-y\psi_1)}{\lambda_2 x^2+x\psi_1}=\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\frac{y}{x}+\left(\frac{\varphi_1}{\lambda_2 x}-\frac{y\psi_1}{\lambda_2 x^2}\right)}{1+\frac{\psi_1}{\lambda_2 x}}. \quad (27)$$

В силу условий (24), вторые слагаемые в числителе и в знаменателе последней части равенств (27) могут быть сделаны сколь угодно малыми по абсолютной величине при достаточно малом h, так что знак правой части равенства (27) зависит от знака члена $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\frac{y}{x}$. Рассмотрим отдельно две возможности: а) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1>0$ и б) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1<0$ (знак равенства исключён, так как мы предполагаем корни уравнения (17) неравными).

а) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1>0$. В этом случае выражение, стоящее в левой части равенства (27), положительно на стороне $OA\left(\text{где } \frac{y}{x}>0\right)$ и отрицательно на стороне OB; кроме того, очевидно, что на OA имеем $\frac{dy}{dx}>0$, а на OB имеем $\frac{dy}{dx}<0$. Следовательно, тангенс наклона касательных к интегральным кривым на стороне OA больше $\operatorname{tg}\alpha$, а на стороне OB меньше $-\operatorname{tg}\alpha$ (черт. 12, *a*). Интегральные кривые, проходящие через точки периметра OAB, не могут из него выйти при убывании x, ибо, как это следует из направления поля на сторонах OA и OB, они не могут их пересечь, переходя изнутри треугольника наружу. Оставаясь, таким образом, внутри OAB, они, в силу доказанного в п. 3 предыдущего параграфа, могут быть продолжены до любой близости границы области D, т. е. вплоть до особой точки O. При этом тангенс угла наклона секущей, проведённой из точки O, к такой интегральной кривой, равный $\frac{y(x)}{x}$, по абсолютной величине меньше $\operatorname{tg}\alpha$; так как α может быть выбрано сколь угодно малым, то мы находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=0,$$

т. е. все найденные интегральные кривые касаются в начале координат оси Ox.

б) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1<0$. При достаточно малом h теперь мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}<0 \text{ на } OA, \quad \frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}>0 \text{ на } OB;$$

соответствующее расположение направлений поля дифференциального уравнения показано на черт. 12, *b*. Интегральная кривая, проходящая через точку A, очевидно, будет вся расположена вне треугольника OAB; кривые, проходящие через точки стороны OA, входя в OAB, при возрастающем x, при дальнейшем его возрастании не могут пересечь сторон OA и OB (что противоречило бы найденному нами направлению поля на этих сторонах), следовательно, они должны пересечь сторону AB. При этом, благодаря непрерывной и однозначной зависимости от начальных условий при перемещении начальной точки от A к O точка выхода будет монотонно перемещаться по стороне AB от A вниз. Пусть предельная точка для этих точек будет A' с координатами (h, y_0); интегральная кривая через точку A' при убывании x не может пересечь сторону AO между A и O, так как если бы она пересекла её в некоторой точке C, то кривые, проходящие через точки отрезка OC, близкие к точке C, пересекали бы сторону AB ниже A', и A' не была бы предельной точкой; равным образом, интегральная кривая через точку A' не может пересечь отрезок OB, так как иначе кривые, проходящие через близкие к A' точки отрезка AA', тоже пересекали бы отрезок OB, а, по определению точки A', они пересекают отрезок OA и выходят при этом (при убывающем x) из OAB. Итак, кривая через точку A' не может при убывании x выйти из треугольника OAB, следовательно, она может быть продолжена вплоть до точки O; рассуждение, приведённое для случая а), показывает, что эта кривая, входя в точку O, касается оси Ox. Аналогично найдётся на той же стороне AB точка $B'(h, \overline{y}_0)$ такая, что интегральные кривые, проходящие через точки промежутка BB', пересекают при убывании x сторону OB и выходят при этом из треугольника OAB, а кривая

через точку B' входит в особую точку, касаясь оси Ox. При этом очевидно, что $y_0 \geqslant \bar{y}_0$.

Докажем, наконец, что точки A' и B' совпадают или что $y_0 = \bar{y}_0$, т. е. в рассматриваемом случае только одна кривая входит в особую точку, касаясь оси Ox. Для этого введём в уравнение (21′) переменные x, $u = \frac{y}{x}$; уравнение примет вид:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)u + \frac{\varphi_1(x, ux) - u\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}}{1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}} \equiv \Phi(x, u). \qquad (21'')$$

При произведённом преобразовании треугольник OAB (черт. 12, b) переходит в прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant h$, $-\operatorname{tg}\alpha \leqslant u \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Интегральной кривой, которая в координатах (x, y) входила в начало координат, касаясь оси Ox, в координатах (x, u) соответствует кривая, примыкающая к точке (0, 0) [так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to 0} u = 0$]. Точкам A' и B' на стороне AB треугольника OAB соответствуют точки $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ на стороне $x = h$ прямоугольника плоскости (x, u); их ординаты будут соответственно $u_0 = \frac{y_0}{u}$ и $\bar{u}_0 = \frac{\bar{y}_0}{h}$. Чтобы доказать, что точки A' и B' совпадают, достаточно доказать, что $u_0 = \bar{u}_0$.

Итак, допустим, что уравнение (21″) имеет два решения $u(x)$ и $\bar{u}(x)$, такие, что

$$\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0} \bar{u} = 0, \qquad u(h) = u_0, \qquad \bar{u}(h) = \bar{u}_0, \qquad u_0 > \bar{u}_0. \qquad (A)$$

Мы имеем два тождества:

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(x, u), \qquad x\frac{d\bar{u}}{dx} = \Phi(x, \bar{u}).$$

Вычитая их почленно, получаем:

$$x\frac{d(u - \bar{u})}{dx} = \Phi(x, u) - \Phi(x, \bar{u}) = (u - \bar{u})\Phi'_u(x, \bar{\bar{u}}), \qquad u > \bar{\bar{u}} > \bar{u}. \qquad (28)$$

Производная $\Phi'_u(x, u)$ имеет вид:

$$\Phi'_u(x, u) = \left[1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right]^{-2}\left\{\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 + \frac{\varphi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x} - \frac{u\psi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2}\right]\cdot\left[1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right] -$$

$$\left. - \frac{\psi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)u + \frac{\varphi_1(x, ux) - u\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right]\right\}.$$

В силу условий, наложенных на функции φ и ψ [существование непрерывных производных и соотношений (24) и (24′)], эта производная есть непрерывная функция, в частности при $x=0$, и мы находим:

$$\Phi'_u(0, u)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1<0$$

[последнее неравенство соответствует рассматриваемому случаю б)]. Если h выбрать достаточно малым, то для всех значений x, $0\leqslant x\leqslant h$, будет, в силу непрерывности Φ'_u, иметь место неравенство:

$$\Phi'_u(x, u)<-\rho,$$

где ρ — постоянное число, $0<\rho<1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Итак, из тождества (28) получаем неравенство:

$$x\frac{d(u-\bar{u})}{dx}<-\rho(u-\bar{u}), \quad \text{или} \quad \frac{d(u-\bar{u})}{u-\bar{u}}<-\rho\frac{dx}{x}.$$

(Знаменатель левой части не обращается в нуль, так как две интегральные кривые уравнения (21″) не могут иметь общих точек, кроме точки $x=0$, $u=0$.) Интегрируем последнее неравенство между x и $h\,(0<x<h)$, получаем:

$$\ln\frac{u_0-\bar{u}_0}{u(x)-\bar{u}(x)}<-\rho\ln\frac{h}{x},$$

или

$$u(x)-\bar{u}(x)>(u_0-\bar{u}_0)\left(\frac{h}{x}\right)^{\rho}.$$

Последнее неравенство показывает, что если $u_0-\bar{u}_0>0$, то при стремлении x к нулю разность в левой части неограниченно возрастает, вопреки первому из предположений (A). Наше утверждение доказано.

Мы можем теперь легко выяснить расположение интегральных кривых в разбираемом нами случае (когда корни уравнения (17) действительны и различны). Существуют два типа расположения интегральных кривых около особой точки, в зависимости от знаков λ_1 и λ_2.

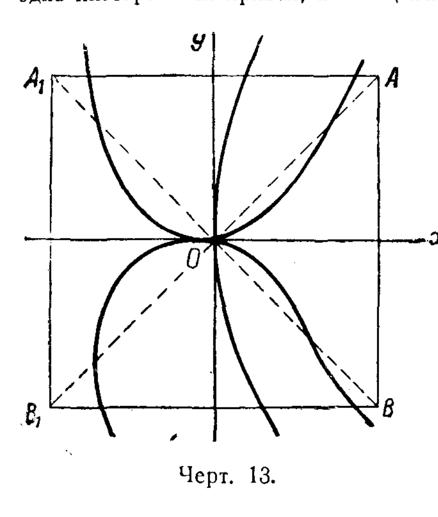
I тип. λ_1 и λ_2 одинакового знака. Без ограничения общности можно предположить, что

$$\lambda_1>\lambda_2>0.$$

Построим равнобедренный треугольник OAB, симметричный относительно положительной полуоси Ox, с углом при вершине $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ (черт. 13). При достаточно малой высоте h этого треугольника, в силу того, что $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1>0$, все входящие в него интегральные кривые входят в особую точку, касаясь положительной полуоси Ox. Аналогично, из рассмотрения симметричного треугольника OA_1B_1, расположенного в сторону отрицательной полуоси абсцисс, мы заключаем, что все кривые, входящие в этот треугольник, войдут в начало, касаясь оси абсцисс. Далее, перепишем уравнение (21′) в виде:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\lambda_2 x+\psi_1(x, y)}{\lambda_1 y+\varphi_1(x, y)} \qquad (21''')$$

и рассмотрим треугольник OAA_1. Так как $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$, то существует только одна интегральная кривая, касающаяся оси Oy; все остальные интегральные кривые выйдут из OAA_1 через стороны OA и OA_1 и, попав в треугольники OAB и OA_1B_1, тоже войдут в начало, касаясь оси Ox. Аналогичное положение имеет место в треугольнике OBB_1. Итак, *все интегральные кривые из достаточно малой окрестности особой точки входят в особую точку с определённой касательной*. Мы имеем *узел* (черт. 13).

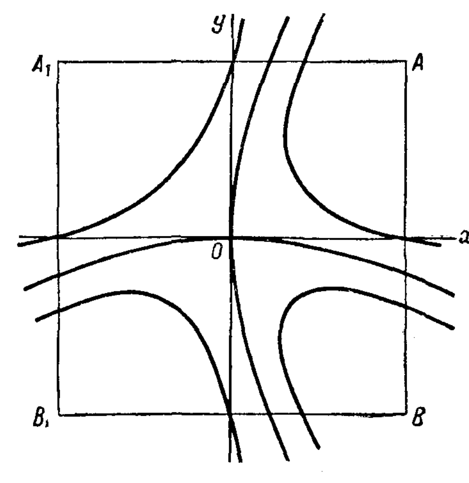


Черт. 13.

II тип. λ_1 и λ_2 противоположного знака. Предполагаем

$$\lambda_1 > 0 > \lambda_2.$$

Опять строим треугольники OAB, OA_1B_1, OAA_1, OBB_1 (черт. 14). Для уравнения (21′) имеем неравенство $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 < 0$. Таким образом, в каждом из треугольников OAB и OA_1B_1 окажется только по одной интегральной кривой, входящей в особую точку, касаясь оси Ox. Аналогично, для уравнения (21‴) имеем: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$; поэтому в треугольниках OAA_1 и OBB_1 опять имеем по одной интегральной кривой, входящей в начало; эти кривые касаются Oy. Итак, *в начало координат входят только четыре интегральные кривые*. Особая точка есть *седловина* (черт. 14).



Черт. 14.

2) Корни уравнения (17) — комплексные сопряжённые: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, $p \neq 0$, $q > 0$. Мы видели, что в соответствующем случае, при помощи подстановки с действительными коэффициентами, уравнение (13) могло быть приведено к виду:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{pv - qu}{pu + qv}. \tag{20}$$

Применяя ту же подстановку к уравнению (21), мы приведём линейные члены к той же форме, какую они имеют в правой части уравнения (20); обозначая новые переменные попрежнему через x и y, мы можем рассматривать в данном случае уравнение (21) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{py - qx + \varphi_2(x, y)}{px + qy + \psi_2(x, y)} \equiv \frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}, \tag{29}$$

где φ_2 и ψ_2 — опять бесконечно малые порядка выше первого при бесконечно малых x и y. Для исследования интегральных кривых уравнения (29) целесообразно ввести полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Мы получаем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r(P_1\sin\varphi + Q_1\cos\varphi)}{P_1\cos\varphi - Q_1\sin\varphi}$$

или, в раскрытом виде (деля числитель и знаменатель на r),

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{pr + \varphi_2\sin\varphi + \psi_2\cos\varphi}{-q + \frac{\varphi_2\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi}{r}} \equiv -\frac{pr}{q}\,\frac{1+\omega(r,\varphi)}{1+\omega_1(r,\varphi)}, \tag{30}$$

где

$$\omega = \frac{\varphi_2\sin\varphi + \psi_2\cos\varphi}{pr} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{\varphi_2\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi}{-qr},$$

в силу условий (24), стремятся к нулю вместе с r. Выберем r_0 достаточно малым, чтобы при $r \leqslant r_0$ второй множитель последней части равенств (30) заключался между границами $1-\alpha$ и $1+\alpha$ ($\alpha < 1$ — произвольное положительное число). Тогда знак правой части (30) будет совпадать со знаком $-\frac{p}{q}$; положим для определённости $-\frac{p}{q} < 0$ и рассмотрим при возрастающем φ течение интегральной кривой, определяемой начальными значениями (r_0, φ_0). Радиус-вектор будет монотонно убывать, так как $\frac{dr}{d\varphi} < 0$; при этом, в силу выбора r_0, будут иметь место неравенства:

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)\,r < \frac{dr}{d\varphi} < -\frac{p}{q}(1-a)\,r,$$

откуда

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)\,d\varphi < \frac{dr}{r} < -\frac{p}{q}(1-\alpha)\,d\varphi.$$

Интегрируем последние неравенства от φ_0 до $\varphi > \varphi_0$; получаем:

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)(\varphi-\varphi_0) < \ln\frac{r}{r_0} < -\frac{p}{q}(1-\alpha)(\varphi-\varphi_0),$$

или

$$r_0 e^{-\frac{p}{q}(1+\alpha)(\varphi-\varphi_0)} < r < r_0 e^{-\frac{p}{q}(1-\alpha)(\varphi-\varphi_0)}.$$

Интегральная кривая при изменении φ от φ_0 до $+\infty$ заключена между двумя логарифмическими спиралями; она *приближается к особой точке, совершая бесчисленное множество оборотов.* Особая точка представляет собой *фокус.*

Рассмотрим ещё случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2$. Линейные части после приведения к простейшей форме пусть имеют вид такой же, как в случае (6) предыдущего раздела. Итак, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \varphi(x, y)}{x + \psi(x, y)}. \tag{31}$$

Относительно φ и ψ мы сделаем более сильные предположения, чем до сих пор: мы предположим, что функции

$$\frac{\varphi(x, ux)}{x^2} = \Phi(x, u) \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x, ux)}{x^2} = \Psi(x, u)$$

являются непрерывными функциями своих аргументов при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, где δ — положительное число[1]), и что они имеют в той же области непрерывные производные по u [эти условия будут, в частности, выполнены, если $\varphi(x, y)$ имеет вид $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \overline{\varphi}(x, y)$, где A, B, C — постоянные и $\overline{\varphi}(x, y)$ — бесконечно малая порядка выше второго при бесконечно малых x, y, у которой частная производная по y имеет порядок малости выше первого; тогда $\Phi(x, u) = A + 2Bu + Cu^2 + \frac{\overline{\varphi}(x, ux)}{x^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 2B + 2Cu + \frac{\overline{\varphi}'_y(x, ux)}{x}$; легко видеть, что обе эти функции непрерывны для достаточно малых значений x, включая $x = 0$; аналогично для $\Psi(x, y)$]. Делаем в уравнении (31) замену переменного $y = ux$; уравнение примет вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{ux + \varphi(x, ux)}{x + \psi(x, ux)},$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\varphi(x, ux)}{x^2} - u\frac{\psi(x, ux)}{x^2}}{1 + \frac{\psi(x, ux)}{x^2}} \equiv \frac{\Phi(x, u) - u\Psi(x, u)}{1 + x\Psi(x, u)}. \tag{32}$$

При достаточно малых значениях x знаменатель, очевидно, в нуль не обращается; числитель является при $x = 0$ непрерывной функцией; правая часть, ввиду непрерывности Φ'_u и Ψ'_u, удовлетворяют условию Липшица по u в любой ограниченной области $0 \leqslant x \leqslant \delta$, $-M \leqslant u \leqslant M$. Следовательно, все точки оси u, $x = 0$, $u = u_0$, являются обыкновенными для уравнения (32); через каждую проходит единственная интегральная кривая. Возвращаясь к уравнению (31), мы видим, что *через точку $x = 0$, $y = 0$ проходит бесконечное множество интегральных кривых, причём для каждого значения u_0, $-\infty < u_0 < +\infty$, существует единственная интегральная кривая, имеющая в начале координат касательную, уравнение которой есть $y = u_0 x$*. Мы снова имеем дикритический *узел*.

Мы оставили здесь без рассмотрения тот случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2$, когда линейные члены приводятся к виду, соответствующему случаю 5) предыдущего раздела; можно показать, что и для уравнения (21) начало координат будет в таком случае узел. Далее, мы не рассматриваем случай *чисто мнимых* λ_1 и λ_2; здесь может иметь место как *центр*, так и *фокус*; члены первого порядка уравнения (21) не определяют характера особой точки и требуется дополнительное исследование. Также нами оставлен в стороне случай нулевых корней, равно как и все случаи, когда главные члены P и Q в окрестности особой точки имеют порядок выше первого относительно x и y. Все эти случаи рассмотрены Бендиксоном в предположении, что P и Q разлагаются в окрестности особой точки в степенные ряды по x и y, и Фроммером — в более общих предположениях.

---

[1]) *Число δ выбирается так, чтобы в полосу* $0 < x \leqslant \delta$, $-\infty < u < +\infty$ плоскости (x, u) не попало ни одной особой точки преобразованного уравнения.

Пример 5. Найти расположение и характер особых точек для уравнения Якоби

$$(-6x+9y)\,dx+(6x-6y)\,dy+(-4x+5y)(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Разрешаем уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-9y-4xy+5y^2}{6x-6y-4x^2+5xy}.$$

Прежде всего, замечаем особую точку (0, 0); для определения её характера составляем уравнение (17):

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ -6 & -9-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

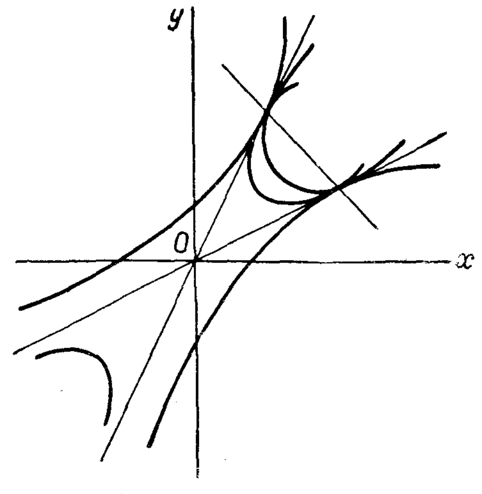
или $\lambda^2+3\lambda-18=0$, откуда $\lambda=-\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}$, $\lambda_1=+3>0$, $\lambda_2=-6<0$. Корни действительные разных знаков; особая точка есть седловина. Направления касательных к интегральным кривым определяется из уравнения:

$$k=\frac{6-9k}{6-6k},$$

$$2k^2-5k+2=0,$$

$$k_1=2, \quad k_2=\frac{1}{2}.$$

(На основании теории уравнения Якоби можно предвидеть, что по этим направлениям входят в начало координат две из трёх интегральных прямых.)



Черт. 15.

Для нахождения остальных особых точек приравниваем нулю числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения:

$$6x-9y-4xy+5y^2=0,$$

$$6x-6y-4x^2+4xy=0.$$

Решения этих уравнений, кроме $x=0$, $y=0$, будут: $x=1$, $y=2$, $x=2$, $y=1$. Чтобы исследовать характер особой точки (1, 2), вводим новые переменные: $x=x_1+1$, $y=y_1+2$; уравнение принимает вид:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2x_1+7y_1-4x_1y_1+5y_1^2}{8x_1-y_1-4x_1^2+5x_1y_1}.$$

Оно имеет особую точку $x_1=0$, $y_1=0$.

Для определения характера этой точки пишем уравнение (17):

$$0=\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda+54,$$

$$\lambda=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}, \quad \lambda_1=9, \quad \lambda_2=6.$$

Оба корня одного знака; особая точка — узел. Уравнение для угловых коэффициентов касательных к интегральным кривым:

$$k = \frac{-2+7k}{8-k}, \quad k^2 - k - 2 = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_1 = -1.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что особая точка (2, 1) также является узлом. Ход интегральных кривых приблизительно представлен на черт. 15.

§ 3. Интегрирующий множитель.

1. Всякое уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

можно переписать в дифференциальной форме:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0,$$

или, умножая обе части на некоторую функцию $N(x, y)$, в более симметричном виде:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{33}$$

Рассмотрим частный случай, когда левая часть уравнения (33) представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$M\,dx + N\,dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

В этом случае уравнение (33) называется *уравнением в полных* (точных) *дифференциалах*. Последнее тождество равносильно двум:

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{34}$$

Если в уравнение (33) подставить вместо y решение уравнения (1), то мы будем иметь $dU = 0$, откуда

$$U(x, y) = C \tag{35}$$

для значений x и y, соответствующих этому решению (C — постоянное); и обратно, для функции y, определяемой уравнением (35), имеем $dU = 0$. Итак, уравнение (35), содержащее произвольное постоянное, является интегралом уравнения (33) в полных дифференциалах.

Для существования решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принимающего при $x = x_0$ значение y_0, достаточно, чтобы уравнение (35) определяло y как неявную функцию от x, т. е. чтобы в точке (x_0, y_0) мы имели $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = N(x_0, y_0) \neq 0$; в таком

случае решение $y(x)$, проходящее через точку (x_0, y_0), определится из уравнения:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0);$$

если $N(x_0, y_0) = 0$, а $M(x_0, y_0) \neq 0$, то соотношение (35) определит x как функцию от y; исключение в смысле существования и единственности решения составляют только точки, в которых $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$; это — особые точки уравнения (33) (ср. предыдущий параграф).

Найдём признак, по которому для данного уравнения (33) можно судить, принадлежит ли оно к классу уравнений в точных дифференциалах. Из равенств (34), предполагая существование соответствующих производных, получаем два выражения для $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$; приравнивая их, получаем необходимое условие[1]):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{36}$$

Покажем, что условие (36) является также достаточным, а именно, предполагая его выполненным, найдём функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую соотношениям (34). Мы имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$, откуда интегрируя по x от x_0 до x и считая y постоянным, получаем:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y). \tag{34'}$$

Построенная функция (34′) при всяком φ удовлетворяет первому из соотношений (34). Покажем, что при выполнении условия интегрируемости (36) можно найти такую функцию $\varphi(y)$, чтобы выполнялось и второе соотношение (34). Мы находим из формулы (34′), применяя правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y).$$

Используя тождество (36), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

---

[1]) Впервые это условие получил знаменитый математик Леонард Эйлер (1707 — 1783) член Петербургской академии наук.

Это выражение окажется равным $N(x, y)$, если положить

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

откуда одно из значений $\varphi(y)$ есть

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy.$$

Итак, функция $U(x, y)$ найдена; приравнивая её произвольному постоянному, получаем общий интеграл уравнения (33):

$$U(x, y) \equiv \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{37}$$

Примечание. На практике оказывается проще дифференцировать равенство (34′) по y и, заменяя $\frac{\partial U}{\partial y}$ известной функцией $N(x, y)$, определить из полученного равенства $\varphi'(y)$, а затем найти φ квадратурой.

Пример 6. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$. Здесь $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 6x^2y + 4y^3$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial N}{\partial x}$. Условие (36) выполнено. $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$, $U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$; вычисляем $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} - 6x^2y = N - 6x^2y = 4y^3, \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

Полный интеграл $U \equiv x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Задачи.

Проверить, что левая часть данных уравнений является полным дифференциалом, и решить эти уравнения:

52. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

53. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

54. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

55. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

2. Если левая часть уравнения (33) не есть полный дифференциал, возникает вопрос — нельзя ли найти такую функцию $\mu(x, y)$, по умножении на которую левая часть уравнения (33) станет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Такая функция μ назы-

вается *интегрирующим множителем*. Таким образом, если μ — интегрирующий множитель, мы имеем:

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = dU; \qquad \mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{38}$$

Первый вопрос: для всякого ли уравнения первого порядка существует интегрирующий множитель? Из теоремы существования мы знаем, что при известных условиях уравнение (1) имеет общий интеграл [1]):

$$U(x, y) = C.$$

Дифференцируем это равенство по x, предполагая, что y есть функция x; таким образом, мы исключим C и придём к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Это уравнение должно быть тождественно с исходным уравнением (33), которое мы напишем в виде:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}.$$

Сравнивая эти оба вида одного и того же дифференциального уравнения, мы приходим к равенству:

$$-\frac{M}{N} = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu$$

(через μ мы обозначили общую величину двух последних отношений).

Из последних равенств имеем:

$$\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu N = \frac{\partial U}{\partial y},$$

т. е. μ является интегрирующим множителем. Итак, *всякое дифференциальное уравнение первого порядка*, удовлетворяющее некоторым условиям, *имеет интегрирующий множитель*.

Число интегрирующих множителей данного уравнения бесконечно. В самом деле, пусть μ есть какой-нибудь интегрирующий множитель уравнения (33), а $U(x, y) = C$ есть интеграл этого уравнения. Тогда $\mu_1 = \varphi(U)\mu$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, является также интегрирующим множителем. В самом деле, выражение

$$\mu_1(M\,dx + N\,dy) = \varphi(U)\,\mu\,(M\,dx + N\,dy) = \varphi(U)\,dU$$

---

[1]) В п. 4 § 1 мы доказали существование общего интеграла, где параметр $C = y_0$ есть начальная ордината интегральной кривой; вопрос о законности дифференцирования функции, приравниваемой C, отложен до главы VII.

является полным дифференциалом от функции

$$\Phi(U) = \int \varphi(U)\, dU.$$

Следовательно,

$$\mu_1 = \varphi(U)\, \mu \tag{39}$$

есть интегрирующий множитель уравнения (33).

Докажем, что *всякий интегрирующий множитель уравнения* (33) *даётся формулой* (39).

В самом деле, пусть, кроме интегрирующего множителя μ, имеется ещё какой-то интегрирующий множитель μ_1. Мы имеем:

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy) = dU, \tag{38}$$

$$\mu_1\,(M\,dx + N\,dy) = dV, \tag{38'}$$

где V — некоторая функция от x, y; раскрывая последние тождества, имеем:

$$\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu_1 M = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mu_1 N = \frac{\partial V}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, якобиан функций U и V тождественно равен нулю, а так как $\frac{\partial U}{\partial y} \not\equiv 0$, то между этими функциями существует зависимость вида:

$$V = \psi(U).$$

Равенство (38′) даёт тогда:

$$\mu_1 (M\,dx + N\,dy) = \psi'(U)\, dU = \psi'(U)\, \mu\, (M\,dx + N\,dy),$$

откуда

$$\mu_1 = \psi'(U)\, \mu,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если известны два существенно различных* (т. е. не различающихся только постоянным множителем) *интегрирующих множителя* μ *и* μ_1 *уравнения* (33), *то общий интеграл получается без всякой квадратуры в виде*:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const}.$$

В самом деле, по доказанному, последнее равенство имеет вид: $\Phi(U) = C$, а это и есть общий интеграл уравнения (33).

3. Нахождение интегрирующего множителя. Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{40}$$

или же, деля обе части равенства (40) на μ,

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{40'}$$

Мы получили в виде (40) или (40′) уравнение в частных производных для определения неизвестной функции μ. Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще, чем задача решения уравнения (33). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (40); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (40), удаётся найти такое частное решение, и тогда интеграция уравнения (33) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, случай, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией одного только x. В этом случае $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, и уравнение (40′) обращается в такое:

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{41}$$

Ясно, что для существования интегрирующего множителя, не зависящего от y, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была функцией одного x; в таком случае $\ln\mu$ найдётся квадратурой.

Пример 7.

$$\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)\,dy=0.$$

Здесь

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=1,\quad \mu=e^x.$$

Уравнение

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)\,dy=0$$

есть уравнение в точных дифференциалах. Интегрируем его:

$$U = \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) =$$

$$= y\int e^x(2x + x^2)\,dx + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y) = ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(y).$$

Для нахождения $\varphi(y)$ вычисляем $\frac{\partial U}{\partial y}$ и приравниваем его μN:

$$e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\varphi'(y) = 0,$$

и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Рассмотрим частный случай интегрирующего множителя, зависящего только от x, когда $N = 1$; в этом случае уравнение имеет вид:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0. \tag{42}$$

Уравнение (41) примет вид: $\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, с условием, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ есть функция одного x,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x);$$

в таком случае $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x, y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$

т. е. *уравнение*, написанное в виде (42) *и допускающее интегрирующий множитель, зависящий только от x, есть уравнение линейное*.

Из уравнения (41) имеем:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\varphi(x), \quad \mu = e^{-\int\varphi(x)\,dx}.$$

Переходя к обозначениям главы I для линейного уравнения, приходим к заключению:

Линейное уравнение $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ *имеет интегрирующий множитель* $\mu = e^{\int P\,dx}$.

Здесь мы имеем ещё один способ интегрирования линейного уравнения. Аналогично получим условие того, что дифференциальное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y, и самое выражение этого множителя.

Пример 8. Уравнение $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x$ (задача 32 на стр. 40) имеет интегрирующий множитель $e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx} = \cos x$; умножая на него обе части уравнения, имеем:

$$\cos x\, dy - y \sin x\, dx - \cos^2 x\, dx = 0,$$

где левая часть есть полный дифференциал; интегрируя, находим:

$$y \cos x - \int \cos^2 x\, dx = C,$$

или

$$y \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x = C$$

— общий интеграл.

Заметим, что *разделение переменных сводится к умножению на некоторый интегрирующий множитель.*

В самом деле, если дано уравнение (ср. главу I, § 2, 3):

$$M(x) N(y)\, dx + P(x) Q(y)\, dy = 0,$$

то для разделения переменных мы умножаем обе части на $\mu = \frac{1}{N(y) P(x)}$; ясно, что после умножения левая часть уравнения становится полным дифференциалом, т. е. μ есть интегрирующий множитель.

Пользуясь этим замечанием, найдём интегрирующий множитель однородного уравнения:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{43}$$

где M и N — однородные функции одинакового измерения m. Мы знаем, что введением новой функции $u = \frac{y}{x}$ переменные в уравнении разделяются; в самом деле, мы имеем:

$$M(x, y) = M(x, xu) = x^m M(1, u)$$

(в силу однородности) и аналогично:

$$N(x, y) = x^m N(1, u).$$

Внося эти выражения, а также $dy = x\, du + u\, dx$ в уравнение (43), получаем:

$$x^m \{[M(1, u) + N(1, u) \cdot u]\, dx + xN(1, u)\, du\} = 0.$$

Для разделения переменных надо обе части умножить на интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{x^{m+1}[M(1, u) + N(1, u) \cdot u]},$$

или, возвращаясь к старым переменным x, y, на

$$\mu = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}.$$

Это есть интегрирующий множитель однородного уравнения (43). Он не существует лишь в случае, если $xM + yN \equiv 0$, или если $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$, т. е. для уравнения $y\,dx - x\,dy = 0$.

Пример 9.

$$(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0,$$

$$\mu = \frac{1}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Умножая обе части уравнения на этот множитель и группируя члены, получаем:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}.$$

(Ср. главу II, § 2, **2.**)

На практике для нахождения интегрирующего множителя часто применяется такой приём: все члены уравнения разбиваются на две группы, для каждой из которых было бы легко усмотреть один интегрирующий множитель; затем пишут выражения наиболее общего интегрирующего множителя для каждой группы и смотрят, нельзя ли выбрать входящие в эти выражения произвольные функции так, чтобы оба интегрирующих множителя оказались равными; если это оказывается возможным, то интегрирующий множитель уравнения найден.

Пример 10. (Задача 40 главы I, стр. 41).

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Разбиваем на две группы:

$$(x\,dx) + (-y^2\,dx + 2xy\,dy) = 0.$$

У первой скобки очевиден интегрирующий множитель 1, а общее выражение интегрирующего множителя $\mu_1 = \varphi(x)$; у второй скобки очевиден интегрирующий множитель $\frac{1}{xy^2}$ (переменные разделяются); по умножении на него имеем:

$$-\frac{dx}{x} + \frac{2y\,dy}{y^2} = 0;$$

общий интеграл:

$$U_2 \equiv \frac{y^2}{x} = C.$$

Общее выражение ннтегрирующего множителя второй скобки есть

$$\mu_2 = \frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Теперь стараемся подобрать ψ так, чтобы μ_2 имело тот же вид, что μ_1, т. е. было функцией только от x; очевидно, для этого достаточно положить $\psi(U_2) = U_2$; итак, окончательно $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножаем данное уравнение на μ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} = 0,$$

откуда

$$\ln x + \frac{y^2}{x} = C.$$

ЗАДАЧИ.

56. $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0$.

57. $(x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0$.

58. $ax\,dy + by\,dx + x^m y^n(\alpha x\,dy + \beta y\,dx) = 0$.

59. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

60. Решить способом интегрирующего множителя задачу 34 на стр. 40:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x.$$

61. То же для задачи 37 (там же):

$$x\,dy + y\,dx - xy^2 \ln x\,dx = 0.$$

62. Вывести выражение интегрирующего множителя для уравнения Бернулли.

63. Найти интегрирующий множитель уравнения

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0,$$

имеющий вид $f(x+y)$.

64. Найти все уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

допускающие интегрирующий множитель вида XY, где X есть функция только от x, а Y — только от y.

ГЛАВА III.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Уравнения первого порядка *n*-й степени.

1. Мы видели в главе I, что общий вид уравнения первого порядка может быть записан так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

В настоящей главе мы часто будем предполагать, что левая часть уравнения (1) является многочленом относительно y' степени n, причём коэффициенты этого многочлена в некоторой области D плоскости xy суть непрерывные функции от x и от y, допускающие по y непрерывные частные производные.

$$F(x, y, y') \equiv A_n(x, y) y'^n + A_{n-1}(x, y) y'^{n-1} + \ldots + A_0(x, y) = 0. \tag{1'}$$

Уравнение вида (1′) называется уравнением первого порядка n-й степени относительно y'. Затем допустим, что в области D коэффициент при старшей степени y', т. е. $A_n(x, y)$, нигде не обращается в нуль. Тогда, по основной теореме высшей алгебры, уравнение (1′) для всякой пары значений x, y в рассматриваемой области имеет n решений y' (действительных или мнимых). По теореме о неявных функциях каждое из действительных решений является непрерывной функцией от x и y и имеет конечную частную производную $\frac{\partial y'}{\partial y}$, если для рассматриваемых значений x, y, y' имеем $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ (т. е. если для данных значений x и y уравнение (1′) относительно y' не имеет кратного корня; этот последний случай будет нами разобран дальше, в теории особых решений дифференциального уравнения). Таким образом, во всякой области, в которой $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| \geqslant a > 0$,

разрешённое относительно y' уравнение ($1'$) удовлетворяет условию Липшица [1]).

Мнимые решения для y' нам неинтересны, так как во всём этом курсе рассматриваются только такие дифференциальные уравнения, в которых независимое переменное и функция (а следовательно, и производная) принимают действительные значения. Заметим только, что мнимые решения являются попарно сопряжёнными, что поэтому число мнимых решений всегда чётное и что если при непрерывном изменении x и y пара мнимых решений y' переходит в действительные, то в момент этого перехода два решения становятся равными действительными; в самом деле, пусть эти мнимые решения будут:

$$y_1' = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad y_2' = \alpha(x, y) - i\beta(x, y).$$

Если при непрерывном изменении x и y эти решения переходят в действительные, то для некоторых значений x_0, y_0 мы будем иметь:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \beta(x, y) = 0;$$

для этих значений x_0, y_0, очевидно, имеем: $y_1' = y_2' = \alpha(x_0, y_0)$, т. е. два равных действительных решения. Поэтому, если мы допустим, что в области D ни для каких значений x и y уравнение ($1'$) не имеет кратных корней относительно y', то число действительных и мнимых значений y', определяемых уравнением ($1'$), для всех значений x, y в рассматриваемой области остаётся одно и то же.

---

[1]) Чтобы доказать, что функция y', определённая уравнением ($1'$), удовлетворяет по y условию Липшица, достаточно допустить, что коэффициенты $A_i(x, y)$ удовлетворяют по y условию Липшица в рассматриваемой области и что $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| \geqslant a > 0$. В самом деле, пусть значению y_1 уравнение ($1'$) при данном x ставит в соответствие значение y_1', значению y_2 — значение y_2'. Мы имеем: $F(x, y_1, y_1') = 0$, $F(x, y_2, y_2') = 0$. Вычитая эти равенства почленно, прибавляя и вычитая $F(x, y_1, y_2')$ и применяя к приращению по y' теорему Лагранжа, находим:

$$0 = F(x, y_1, y_1') - F(x, y_1, y_2') + F(x, y_1, y_2') - F(x, y_2, y_2') =$$

$$= (y_1' - y_2')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{y_1,\, y_2' + \theta(y_1' - y_2')} + F(x, y_1, y_2') - F(x, y_2, y_2').$$

Так как коэффициенты A_1 удовлетворяют условию Липшица по y, то тем же свойством обладает и функция F, т. е. мы имеем: $|F(x, y_1, y_2) - F(x, y_2, y_2')| \leqslant L|y_1 - y_2|$. Поэтому последнее равенство вместе с оценкой для $\left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right|$ даёт: $|y_1' - y_2'| \leqslant \frac{L}{a}|y_1 - y_2|$, т. е. условие Липшица для y' с постоянной $\frac{L}{a}$.

Итак, пусть в области D уравнение (1) имеет k действительных решений $(k \leqslant n)$

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \ldots, \quad y' = f_k(x, y). \tag{2}$$

Каждое из уравнений (2) есть уравнение такого вида, для какого в главе II доказано существование единственного решения (теорема Коши), проходящего через точку (x_0, y_0); следовательно, *уравнение* (1) *допускает в точности* k *интегральных кривых, проходящих через данную точку* (x_0, y_0) области D.

Пример 1. $y'^2 + yy' - x^2 - xy = 0$. Разрешая относительно y' (или разлагая левую часть на множители), получаем два уравнения: 1) $y' = x$, 2) $y' = -y - x$; обе правые части однозначны и непрерывны во всей плоскости xy; соответственно имеем два решения

$$1) \quad y = \frac{x^2}{2} + C; \quad 2) \quad y = Ce^{-x} - x + 1.$$

Пример 2. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$. Разрешая относительно y', имеем: $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$; в полосе $-1 < y < 1$ плоскости xOy оба рассматриваемых значения y' действительны и различны, при $|y| > 1$ значения y' мнимы, и при $y = \pm 1$ два корня уравнения для y' совпадают. Рассмотрим полосу $-1 < y < +1$; через каждую точку (x_0, y_0) проходят два решения y_0': для одного из них значение производной в этой точке $y_0' = +\sqrt{1 - y_0^2}$, для другого $y_0' = -\sqrt{1 - y_0^2}$. В данном случае в уравнении, разрешённом относительно y', переменные разделяются, и мы имеем:

$$1) \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx; \quad 2) \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -dx.$$

Получаем решения: 1) $\arcsin y = x + C$, 2) $\arcsin y = -x + C$. (Под символом arcsin мы понимаем главное значение многозначной функции $\operatorname{Arcsin} y$, т. е. однозначную ветвь этой функции, ограниченную условиями $-\frac{\pi}{2} < \arcsin y < \frac{\pi}{2}$). Мы получаем, таким образом, два семейства решений:

$$y = \sin(x + C), \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \sin(-x + C), \quad \left(-\frac{\pi}{2} < -x + C < \frac{\pi}{2}\right).$$

Возьмём начальные условия $x = x_0$, $y = y_0$; для определения произвольного постоянного C получаем уравнения:

$$y_0 = \sin(\pm x_0 + C), \qquad \pm x_0 + C = \arcsin y_0, \qquad C = \mp x_0 + \arcsin y_0.$$

Решения, удовлетворяющие нашему начальному условию, суть

$$y = \sin[(x - x_0) + \arcsin y_0], \qquad -\frac{\pi}{2} < x - x_0 + \arcsin y_0 < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \sin[-(x - x_0) + \arcsin y_0], \qquad -\frac{\pi}{2} < -x + x_0 + \arcsin y_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Первое семейство решений представляет семейство дуг синусоид, взятых от точки минимума до точки максимума (исключая концы); все кривые получаются из одной, например

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

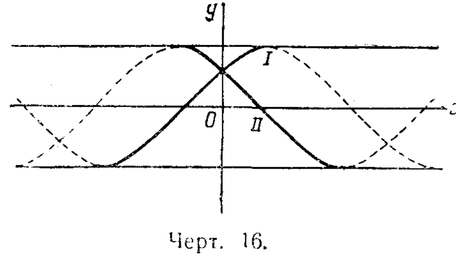
переносом параллельно оси Ox; аналогично, второе семейство есть семейство дуг синусоид, взятых от максимума до минимума; они получаются переносом параллельно оси Ox из кривой:

$$y = \sin(-x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Через каждую точку полосы $-1 < y < 1$ проходит по одной кривой каждого семейства — возрастающая кривая первого семейства и убывающая — второго.

Расширим теперь область, в которой рассматриваются кривые, добавив обе пограничные прямые $y = \pm 1$, на которых условия Липшица не выполняются (у нас $f(x, y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$; производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \mp \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ становится бесконечной при $y \to \pm 1$), но правые части уравнений остаются непрерывными. Теперь нам нет необходимости ограничивать изменение аргумента пределами $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Замечая, далее, что $\sin(-x + C) = \sin(x + \pi + C)$, мы можем представить общее решение одной формулой:

$$y = \sin(x + C),$$
$$-\infty < x < +\infty.$$



Черт. 16.

Это — семейство полных синусоид, получаемых из одной параллельным переносом вдоль оси x; чтобы получить каждую один раз, надо ограничить область изменения произвольного постоянного C, например $0 \leqslant C < 2\pi$. В точках максимума одной полной синусоиды кривая первого семейства переходит в кривую второго, в точке минимума имеет место обратный переход (см. пунктирные кривые на черт. 16). Но эти переходы совершаются на прямых $y = \pm 1$, где условия Липшица не выполнены; поэтому, применяя теорему Коши, мы не можем

связать убывающую и возрастающую дугу синусоиды в одну интегральную кривую; теорема существования даёт две отдельные ветви, проходящие через каждую точку полосы (сплошные линии на черт. 16).

Между примерами 1 и 2 существует очевидное различие, если рассcматривать интегральные кривые не локально — в окрестности каждой точки, где удовлетворяются условия теоремы существования, а на всём их протяжении; в примере 1 дифференциальное уравнение определяло два семейства линий, не имеющих ничего общего (одно алгебраическое, другое трансцендентное); они как бы механически соединены в одно уравнение; мы можем вообще исходить из двух совершенно произвольных уравнений вида:

$$y' - f(x, y) = 0, \quad y' - \varphi(x, y) = 0$$

и, перемножив их левые части, получить уравнение первого порядка второй степени относительно y':

$$y'^2 - [f(x, y) + \varphi(x, y)]\, y' + f(x, y) \cdot \varphi(x, y) = 0,$$

которое эквивалентно двум первоначально данным уравнениям; поле его интегральных кривых получится в плоскости xy простым наложением полей обоих уравнений, причём оба эти поля вообще независимы одно от другого. Не то мы имеем во втором примере: через каждую точку некоторой области опять проходят две интегральные кривые, но они могут быть рассматриваемы как принадлежащие одному и тому же семейству. Выяснить корни этой глубокой разницы невозможно теми средствами, которыми мы здесь располагаем; надо привлечь аппарат теории аналитических функций (*аналитическая теория дифференциальных уравнений*). Отметим только окончательный результат: если левая часть уравнения (1), предполагаемая многочленом по y' с коэффициентами, рациональными относительно y, разлагается на множители низших степеней относительно y', рациональные по y и однозначные по x во всей области её определения (мы скажем в этом случае, что левая часть уравнения (1) является *приводимым многочленом* по y' в области рациональности переменного y), то уравнение (1) является механическим соединением уравнений, которые получим, приравнивая нулю каждый неприводимый множитель; второй случай имеет место, когда y' является иррациональной (алгебраической) функцией от y, иначе говоря, когда $F(x, y, y')$ представляет *неприводимый многочлен* относительно y' в области рациональности y.

2. Общий метод интегрирования уравнений первого порядка n-й степени таков: стараемся разрешить уравнение (1) относительно y'; в случае приводимости левой части получаем несколько уравнений низших степеней; если все неприводимые множители окажутся первой степени, то получаем n уравнений первой степени относительно y', и задача свелась к n различным задачам, которые иногда могут быть разрешены предыдущими методами; если имеем уравнение, неприво-

димое относительно y', то иногда его можно разрешить в радикалах; если полученное иррациональное уравнение относительно y' интегрируется в явном виде, то общее решение обычно содержит те же радикалы, что и исходное уравнение; давая в этом решении радикалам все их значения, получим все n решений исходного уравнения, а если освободиться от радикалов, то получим одно семейство интегральных кривых, к которому принадлежат все n кривых, проходящих через любую точку.

Пример 3. $xy'^2-2yy'+4x=0$. Разрешаем уравнение относительно y': $y'=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4x^2}}{x}$. Получились два уравнения, выражаемых одной формулой с радикалом (левая часть данного уравнения неприводима). Это уравнение однородное, оно легко интегрируется подстановкой:

$$\frac{y}{x}=u, \qquad u+x\frac{du}{dx}=u\pm\sqrt{u^2-4},$$

$$\frac{du}{\pm\sqrt{u^2-4}}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left(u\pm\sqrt{u^2-4}\right)=\ln x-\ln C,$$

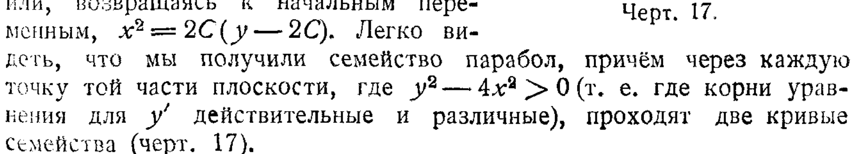
$$u\mp\sqrt{u^2-4}=\frac{x}{C}.$$

Освобождаемся от радикала:

$$\frac{4C}{x}=\frac{4}{u\pm\sqrt{u^2-4}}=u\mp\sqrt{u^2-4},$$

отсюда

$$2u=\frac{x}{C}+\frac{4C}{x},$$



Черт. 17.

или, возвращаясь к начальным переменным, $x^2=2C(y-2C)$. Легко видеть, что мы получили семейство парабол, причём через каждую точку той части плоскости, где $y^2-4x^2>0$ (т. е. где корни уравнения для y' действительные и различные), проходят две кривые семейства (черт. 17).

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения $\left(\text{здесь введено обозначение } \frac{dy}{dx}=p\right)$:

65. $p^2y+p(x-y)-x=0$.
66. $x^2p^2-2xyp+y^2=x^2y^2+x^4$.
67. $p^3-(x^2+xy+y^2)p^2+(x^3y+x^2y^2+xy^3)p-x^3y^3=0$.
68. $xp^2+2xp-y=0$.

Указание. В случае приводимой левой части решить каждое из получающихся уравнений отдельно; в случае неприводимости найти формулу общего решения, заключающую все интегральные кривые.

§ 2. Уравнения, не содержащие явно одного из переменных.

1. Если не разрешённое относительно производной $y' \equiv p$ уравнение не содержит явно искомой функции y, то оно имеет вид:

$$F(x,\ p) = 0. \tag{3}$$

Если левая часть уравнения (3) удовлетворяет условиям существования неявной функции, то в окрестности данного значения x_0 оно определяет одно или несколько решений, выражающих p как функцию от x:

$$p = f_1(x), \quad p = f_2(x), \ldots \tag{4}$$

Уравнения (4), не содержащие y, интегрируются квадратурами:

$$y = \int f_1(x)\,dx + C,$$

$$y = \int f_2(x)\,dx + C, \ldots$$

Однако фактическое разрешение уравнения (3) относительно p иногда приводит к слишком сложным функциям, а часто при помощи элементарных функций и совсем невозможно; можно, однако, указать несколько приёмов, которые в более широком классе случаев дают возможность явно выразить решение уравнения (3).

А) Уравнение (3) может быть разрешено (в элементарных функциях) относительно x; пусть мы получили при этом уравнение:

$$x = \varphi(p). \tag{5}$$

Будем рассматривать p как параметр и постараемся выразить y через тот же параметр. Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

или

$$dy = p\,dx. \tag{6}$$

Но из уравнения (5) $dx = \varphi'(p)\,dp$; подставляя это значение в выражение (6), получаем: $dy = p\varphi'(p)\,dp$, откуда

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{7}$$

Уравнения (5) и (7) дают параметрическое уравнение семейства интегральных кривых заданного уравнения, зависящих от одного произвольного постоянного C. Иногда можно исключить p из этих уравнений и представить общее решение в виде:

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0.$$

Пример 4. $e^{y'}+y'=x$. Уравнение не может быть разрешено в элементарных функциях относительно y', но оно является разрешённым относительно x: $x=e^p+p$; далее, имеем:

$$dy=p\,dx=p\,(e^p+1)\,dp$$

и, наконец,

$$y=\int p\,(e^p+1)\,dp=e^p\,(p-1)+\frac{p^2}{2}+C.$$

Итак, мы выразили x и y в функции p.

В) Может случиться, что x и p, связанные уравнением (3), выражаются через вспомогательный параметр t при помощи элементарных функций $x=\psi(t)$, $p=\chi(t)$. Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx}=p=\chi(t),\quad dy=\chi(t)\,dx=\chi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

и y получается выраженным в функции того же параметра t:

$$y=\int \chi(t)\,\psi'(t)\,dt+C.$$

Это последнее уравнение вместе с уравнением $x=\psi(t)$ даёт искомое параметрическое представление семейства интегральных кривых.

Пример 5. $x^3+p^3-3xp=0$. Чтобы получить параметрические выражения для x и p, полагаем $p=tx$; подставляя это выражение в данное уравнение, находим, сокращая на x^2:

$$x\,(1+t^3)=3t,\quad x=\frac{3t}{1+t^3};$$

далее, $p=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Пишем соотношение:

$$dy=p\,dx=\frac{3t^2}{1+t^3}\,\frac{3\,(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt,\quad y=3\int\frac{(1-2t^3)\,3t^2\,dt}{(1+t^3)^3};$$

для интеграции вводим переменное $u=1+t^3$:

$$y=3\int\frac{(3-2u)\,du}{u^3}=9\int\frac{du}{u^3}-6\int\frac{du}{u^2}=-\frac{9}{2\,(1+t^3)^2}+\frac{6}{1+t^3}+C.$$

2. Уравнение вида

$$F(y,\ y')=0 \tag{8}$$

может быть приведено к рассмотренному типу, если считать y за независимое переменное, а x — за функцию, так как $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Если уравнение разрешено относительно y, т. е. имеет вид $y=\varphi(p)$, то

непосредственно ясно, что для получения x в функции p надо воспользоваться соотношением: $\frac{dy}{dx}=p$, откуда

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{\varphi'(p)\,dp}{p},$$

и x получается в функции параметра p квадратурой:

$$x=\int\frac{\varphi'(p)\,dp}{p}+C.$$

Если нам удаётся заменить соотношение (8) двумя параметрическими уравнениями: $y=\chi(t)$, $p=\psi(t)$, то опять x получается квадратурой:

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{\chi'(t)\,dt}{\psi(t)},\qquad x=\int\frac{\chi'(t)\,dt}{\psi(t)}+C.$$

Пример 6. $y=p+\ln p$. Имеем:

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)dp=\frac{dp}{p}+\frac{dp}{p^2},\quad x=\ln p-\frac{1}{p}+C.$$

Пример 7. $p^3-y^2(a-p)=0$. Полагаем $y=pt$; из данного уравнения получаем: $p=\frac{at^2}{1+t^2}$; далее, $y=\frac{at^3}{1+t^3}$. Из соотношения $dx=\frac{dy}{p}$ получаем:

$$dx=\frac{1+t^2}{at^2}\,\frac{a(3t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt,$$

откуда

$$x=\int\frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt=\int dt+2\int\frac{dt}{1+t^2}=t+2\operatorname{arctg}t+C.$$

Уравнения

$$x=t+2\operatorname{arctg}t+C,\quad y=\frac{at^2}{1+t^2}$$

представляют решение данного уравнения в параметрическом виде.

ЗАДАЧИ.

Найти общие интегралы уравнений:

69. $xy'^3=1+y'$.

70. $p^3-x^3(1-p)=0$.

71. $p^3+y^3-3py=0$.

72. $y=e^{y'}y'^2$.

73. $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

Указание. Подстановка $2-y'=yt$ позволяет выразить y и y' рационально через t.

74. $y(1+y'^2)=2a$. (Удобно ввести подстановку $y'=\operatorname{tg}\varphi$.)

§ 3. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро.

1. Пусть дано неразрешённое уравнение:

$$F(x, y, p)=0. \tag{1}$$

Если мы будем рассматривать x, y, p как декартовы координаты в пространстве, то уравнение (1) определит некоторую поверхность. Известно, что координаты точек поверхности могут быть выражены как функции двух параметров u, v; пусть нам известно такое параметрическое представление поверхности (1):

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad p=\chi(u, v). \tag{9}$$

Система уравнений (9) эквивалентна уравнению (1). Теперь вспомним, что уравнение (1) дифференциальное и что $p=\frac{dy}{dx}$, или $dy=p\,dx$. Подставляя в это последнее равенство выражения p, dy, dx, взятые из уравнений (9), получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right].$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка между u и v. Принимая u за независимое переменное, а v за искомую функцию, можем написать его в виде:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\chi\frac{\partial\varphi}{\partial v}}.$$

Мы получили уравнение первого порядка, но уже разрешённое относительно производной; если мы найдём его общее решение в виде:

$$v=\omega(u, C),$$

то два первых уравнения (9) дадут:

$$x=\varphi\{u, \omega(u, C)\}, \quad y=\psi\{u, \omega(u, C)\},$$

т. е. общее решение уравнения (1), выраженное в параметрической форме (u — параметр, C — произвольное постоянное). Это преобразование (9) обыкновенно применяется в случае, если уравнение (1) легко разрешается относительно x или y; тогда в представлении (9) за параметры естественно взять y и p или x и p.

Рассмотрим сначала уравнение:

$$y=f(x, p). \tag{10}$$

Соотношение $dy = p\,dx$, если принять за параметры x и p, даст нам: $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = p\,dx$, или

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{11}$$

Мы получили уравнение между x и p, разрешённое относительно $\frac{dp}{dx}$; пусть его общее решение будет:

$$p = \varphi(x,\ C). \tag{12}$$

Внося это выражение в формулу (10), получим общее решение искомого уравнения:

$$y = f\{x,\ \varphi(x,\ C)\}.$$

Примечание 1. Уравнение (11) можно получить также из уравнения (10), если дифференцировать обе его части по x, причём p рассматривается как функция x, и $\frac{dy}{dx}$ заменяется через p. Таким образом, мы имеем здесь новый способ сведения уравнения (10) к более простому уравнению (11) при помощи дифференцирования.

Примечание 2. Получив общий интеграл уравнения (11), мы должны помнить, что p в выражении (12) есть вспомогательное переменное; исключив его из (11) и (10), мы получаем общее решение уравнения (10) без дальнейших интеграций. Было бы ошибочным рассматривать равенство (12) как дифференциальное уравнение, полагая в нём $p = \frac{dy}{dx}$, ибо при интеграции этого уравнения вошло бы в решение второе произвольное постоянное, и мы вместо данного уравнения (10) нашли бы решение уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' = y',$$

которое получается из уравнения (11), если считать в нём

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

2. Рассмотрим теперь уравнение:

$$x = f(y,\ p). \tag{13}$$

Можно воспользоваться соотношением $dy = p\,dx$, вводя в него в качестве новых вспомогательных переменных y и p; можно также получить уравнение, разрешённое относительно производной от иско-

мой функции, дифференцируя обе части уравнения (13) по y и принимая во внимание, что $\frac{dy}{dx}=p$, или $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$; при этом мы находим:

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение между y и p; найдя его общее решение $p=\psi(y, C)$ и внеся это выражение на место p в данное уравнение (13), получим его общий интеграл: $x=f\{y, \psi(y, C)\}$. Впрочем, уравнение (13) переходит в уравнение вида (10), если поменять роль переменных x и y.

Пример 8. $p^3-4xyp+8y^2=0$. Это — уравнение первой степени относительно x; разрешаем его: $x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}$. Дифференцируем обе части по y, считая p функцией y и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p. Получаем:

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p}.$$

Преобразуем:

$$\frac{dp}{dy}\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}.$$

Деля обе части на общий множитель p^3-4y^2 [1]), мы получаем уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}$; интегрируя находим: $p=Cy^{\frac{1}{2}}$. Внося это выражение в данное уравнение, получаем:

$$C^3y^{\frac{3}{2}}-4Cxy^{\frac{3}{2}}+8y^2=0,$$

откуда, выделяя частное решение $y=0$, находим:

$$64y=(4Cx-C^3)^2,$$

или, вводя новое постоянное $C_1=\frac{C^2}{4}$,

$$y=C_1(x-C_1)^2.$$

Пример 9. $y=p^2-px+\frac{x^2}{2}$. Дифференцируем по x, считая p функцией x; заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p, имеем: $p=-p+x+(2p-x)\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dx}(2p-x)=2p-x$. Оставляя пока в стороне множитель $2p-x$,

[1]) Приравняв этот множитель нулю и исключив p из полученного уравнения и из первоначального, мы получим особое решение; см. далее § 4, 2, примечание 4 (стр. 131).

имеем дифференциальное уравнение: $\frac{dp}{dx}=1$, $p=x+C$. Подставляя в начальное уравнение, имеем: $y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}$, или $y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2$ — общее решение. (Если бы мы рассматривали равенство $p=x+C$ как новое дифференциальное уравнение, мы получили бы $y=\frac{x^2}{2}+Cx+C_1$ — решение уравнения $y''=1$.)

3. Уравнение Лагранжа. Изложенные преобразования приводят уравнение, не разрешённое относительно производной, к новому уравнению, которое является разрешённым относительно производной; но это новое уравнение, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Сейчас мы рассмотрим тип уравнений, не разрешённых относительно производных, в применении к которым метод дифференцирования всегда приводит к уравнению, интегрируемому в квадратурах. Это — *уравнение Лагранжа*. Так называется уравнение, *линейное относительно x и y*, т. е. уравнение вида:

$$A(p)y+B(p)x=C(p),$$

где коэффициенты A, B, C — данные дифференцируемые функции производной $p=\frac{dy}{dx}$. Разрешая это уравнение относительно y (мы предполагаем, что $A(p)\neq 0$), приводим его к виду:

$$y=\varphi(p)x+\psi(p). \tag{14}$$

Применяя к уравнению (14) метод дифференцирования [так как это — уравнение вида (10)], приходим к уравнению:

$$p=\varphi(p)+[\varphi'(p)x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{14'}$$

Если в этом уравнении рассматривать x как искомую функцию, а p — как независимое переменное, то получаем линейное уравнение:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{14''}$$

Оно, как известно, интегрируется в квадратурах; решение имеет вид:

$$x=C\omega(p)+\chi(p),$$

где, например, $\omega(p)=e^{-\int\frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p)-p}}$. Внося найденное выражение x в данное уравнение, получим выражение вида:

$$y=[C\omega(p)+\chi(p)]\varphi(p)+\psi(p).$$

Таким образом, два переменных выражены в функции параметра p; если исключить этот параметр, получим общий интеграл уравнения Лагранжа в форме $\Phi(x, y, C)=0$.

Примечание. Приведение к виду (14″) невозможно, если $\varphi(p)-p=0$. Случай $\varphi(p)-p\equiv 0$ будет рассмотрен в следующем разделе. Допустим теперь, что для некоторого значения $p=C_0$ мы имеем $\varphi(C_0)-C_0=0$. Тогда уравнение (14′), очевидно, допускает решение $p=C_0$; подставляя в уравнение (14) это значение p, получаем $y=\varphi(C_0)x+\psi(C_0)$. Легко проверить, что это есть решение уравнения (14); можно также убедиться в том, что оно не содержится в формуле общего решения.

Пример 10. $y=2px+p^2$. Дифференцируем по x, считая p и y функциями x и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p; имеем:

$$p=2p+2(x+p)\frac{dp}{dx}.$$

Разрешая относительно $\frac{dx}{dp}$, находим $\frac{dx}{dp}=-\frac{2x}{p}-2$; решение этого уравнения есть $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2p}{3}$. Вставляя это выражение в данное уравнение, находим:

$$y=\frac{2C}{p}-\frac{p^2}{3}.$$

Итак, мы выразили x и y в функции параметра p и произвольного постоянного C, т. е. получили общее решение в параметрической форме. Кроме этого общего решения, имеется ещё решение $y=0$.

4. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа; оно имеет вид:

$$y=px+\varphi(p), \qquad (15)$$

где φ — данная (дифференцируемая) функция. Применяя к этому уравнению метод п. 3, дифференцируем обе части по x; получаем:

$$p=p+[x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}; \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dx}[x+\varphi'(p)]=0.$$

Исследуем на этот раз оба множителя левой части последнего уравнения; первый множитель даёт дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dx}=0,$$

откуда $p=C$, и общее решение уравнения (15) есть

$$y=Cx+\varphi(C). \qquad (16)$$

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой в уравнении (15) p на произвольное постоянное C. Решение (16) геометрически представляет семейство прямых от одного параметра. Приравняем теперь нулю второй множитель $x+\varphi'(p)=0$. Это равенство

определяет p как функцию от x; $p=\omega(x)$; если подставить это значение p в уравнение (15), то получим:

$$y = x\omega(x) + \varphi[\omega(x)]. \tag{17}$$

Можно также подставить значение $x=-\varphi'(p)$ в уравнение (15) и получить ту же кривую в параметрической форме:

$$x=-\varphi'(p), \quad y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \tag{17'}$$

Легко проверить, что кривая (17) или (17′) является **интегральной кривой** уравнения (15); в самом деле, пользуясь, например, параметрическим представлением (17′), находим:

$$dx=-\varphi''(p)\,dp,$$

$$dy=[-p\varphi''(p)+\varphi'(p)-\varphi'(p)]\,dp=-p\varphi''(p)\,dp,$$

откуда $\frac{dy}{dx}=p$. Вставляя значения x, y, y' в уравнение (15), получаем тождество:

$$-p\varphi'(p)+\varphi(p)=-p\varphi'(p)+\varphi(p).$$

Решение (17) или (17′) не содержит произвольного постоянного; оно не получается из общего решения (16) ни при каком постоянном значении C. В самом деле, правая часть уравнения (16) при любом постоянном C есть линейная функция от x; допустим, что $x\omega(x)+\varphi[\omega(x)]=ax+b$ (a и b — постоянные); дифференцируя, находим:

$$\omega(x)+x\omega'(x)+\varphi'[\omega(x)]\,\omega'(x)=a.$$

Но по определению функции $\omega(x)$ имеем: $\varphi'[\omega(x)]=-x$, и предыдущее равенство обращается в следующее:

$$\omega(x)=a,$$

что противоречит уравнению, определяющему $\omega(x)$. Посмотрим, каково геометрическое значение решения (17). Оно получилось путём исключения p из двух уравнений:

$$y=px+\varphi(p), \quad 0=x+\varphi'(p),$$

или, заменяя p через C (от этого результат не изменится), — исключением C из двух уравнений:

$$y=Cx+\varphi(C), \quad 0=x+\varphi'(C),$$

причём второе получается из первого дифференцированием по C. Но из дифференциальной геометрии известно, что этот процесс даёт огибающую семейства прямых (16), представляющего общее решение. Мы скажем, что эта огибающая, т. е. решение (17), есть *особое решение* уравнения Клеро (15).

Итак, *общее решение уравнения Клеро представляет семейство прямых, особое решение — огибающую.*

Примечание 1. Чтобы доказать, что особое решение удовлетворяет уравнению Клеро, нам пришлось допустить, что функция $\varphi(p)$ два раза дифференцируема. Более сложное доказательство приводит к тому же заключению в предположении, что $\varphi(p)$ дифференцируема один раз.

Примечание 2. Рассуждение, приводящее к особому решению, неприменимо, если $\varphi'(p) = \text{const.}$, т. е. если $\varphi(p) = ap + b$ (a и b — постоянные); в этом случае уравнение имеет вид:

$$y = xy' + ay' + b,$$

откуда

$$y' = \frac{y-b}{x+a}, \quad \frac{dy}{y-b} = \frac{dx}{x+a}.$$

Вместо особого решения мы имеем особую точку $x = -a$, $y = b$, через которую проходят все интегральные прямые: $y = b + C(x + a)$.

Примечание 3. Всякое семейство прямых, зависящее от одного параметра (кроме семейства параллельных прямых), при исключении параметра приводит к уравнению Клеро. В самом деле, пусть дано семейство:

$$y = k(t)\,x + b(t).$$

Так как $\frac{dk}{dt} \neq 0$ (иначе было бы $k = \text{const.}$, и мы имели бы семейство параллельных прямых), то уравнение $k(t) = C$ (где C — новый параметр) можно разрешить относительно t, $t = f(C)$. Уравнение семейства примет вид:

$$y = Cx + b[f(C)] \equiv Cx + \Phi(C),$$

т. е. вид общего решения (16) уравнения Клеро.

К уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по какому-нибудь свойству её касательной.

Пример 11. Найти кривую, касательные к которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной 2. Пишем уравнение искомой касательной в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; по условию $ab = 4$, т. е. $b = \frac{4}{a}$, и мы имеем семейство прямых $\frac{x}{a} + \frac{ay}{4} = 1$. Найдём дифференциальное уравнение этого семейства; дифференцируем по x и исключаем a:

$$\frac{1}{a} + \frac{ay'}{4} = 0, \quad a^2 = \frac{-4}{y'}, \quad a = 2\sqrt{-\frac{1}{y'}}, \quad \frac{x\sqrt{-y'}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{-y'}} = 1,$$

или

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}.$$

Это — уравнение Клеро; его общее решение есть $y = Cx + 2\sqrt{-C}$, но нас интересует особое решение, которое даёт искомую кривую. Находим его, дифференцируя последнее равенство по C и исключая C:

$$0 = x - \frac{1}{\sqrt{-C}}, \quad C = -\frac{1}{x^2},$$

откуда $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$, или, окончательно, $xy = 1$ — равносторонняя гипербола.

ЗАДАЧИ.

Найти общие, а для уравнений типа Клеро также особые решения $\left(p \text{ обозначает } \frac{dy}{dx}\right)$.

75. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$.

Указание. Разрешить относительно x и дифференцировать по y (можно упростить заменой искомой функции).

76. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2$.

77. $y = \frac{k(x + yp)}{\sqrt{1 + p^2}}$.

78. $x = py + ap^2$.

79. $y = xp^2 + p^3$.

80. $y = xy' + y' - y'^2$.

81. $y = 2px + y^2p^3$.

Указание. Умножить на y и положить $y^2 = z$.

82. $p^2(x^2 - 1) - 2pxy + y^2 - 1 = 0$.

(Разрешить относительно y или ввести полярные координаты.)

83. $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$.

84. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями координат имеет постоянную величину a.

§ 4. Особые решения.

1. При исследовании уравнения Клеро мы встретились с особым решением. В настоящем параграфе мы исследуем вопрос о существовании особых решений для довольно широкого класса уравнений и укажем два способа их нахождения.

Мы видели, что, по теореме Коши, если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{18}$$

непрерывна в некоторой области и имеет в ней ограниченную производную по y, то через каждую точку (x_0, y_0) области проходит единственная интегральная кривая (свойство единственности); эта кривая входит в семейство от одного параметра (за параметр мы принимали величину y_0) и получается из этого семейства, когда параметр принимает определённое числовое значение. Семейство от одного

параметра образует общее решение, каждая интегральная кривая представляет частное решение, и, в силу теоремы единственности, никаких других решений, в частности особых решений, в этом случае не представится. Например, если правая часть уравнения (18) есть многочлен относительно y,

$$\frac{dy}{dx}=A_n(x)y^n+A_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+A_1(x)y+A_0(x),$$

то в области непрерывности коэффициентов и при ограниченных значениях y (т. е. в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $-k\leqslant y\leqslant k$, где коэффициенты непрерывны в интервале $a\leqslant x\leqslant b$ и k сколь угодно большое положительное число) выражение $\frac{\partial f}{\partial y}$ тоже ограничено — это уравнение не имеет особых решений (таковы, например, линейное уравнение, $n=1$; уравнение Риккати, $n=2$). Далее, если правая часть есть дробная рациональная функция от x и от y

$$f(x, y)=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q суть многочлены по x и y без общего множителя, то производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность только в тех точках x_0, y_0, где $Q(x_0, y_0)=0$, т. е. где $f=\infty$; но в таких точках для уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{Q}{P}$ правая часть [если $P(x_0, y_0)\neq 0$] непрерывна вместе с производной по x, и опять, в силу теоремы Коши, проходящая через такую точку интегральная кривая $x=\psi(y)$ удовлетворяет условию единственности и входит в семейство от одного параметра (т. е. является обыкновенным частным решением). Наконец, если $P(x_0, y_0)=$ $=Q(x_0, y_0)=0$ (это может иметь место лишь в изолированных точках), мы имеем особые точки, различные типы которых были исследованы в главе II; особых решений в этом случае опять нет.

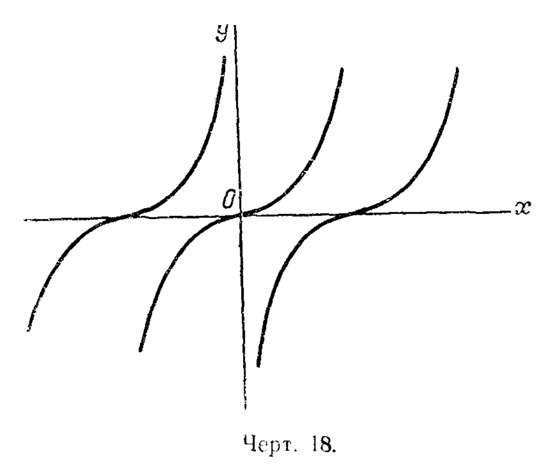
Особым решением мы назовём такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в любой окрестности каждой точки (x, y) особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку. Теорема Коши даёт достаточные условия для того, чтобы в некоторой области не существовало особых решений; следовательно, обратно, для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши. Итак, мы можем искать особые решения только в тех точках плоскости xOy, где не выполнены условия теоремы Коши. В частности, если правая часть уравнения (18) непрерывна во всей рассматриваемой области (как мы будем предполагать всюду в настоящем параграфе), то *особые решения могут проходить только через те точки, в которых не выполняется условие Липшица.* Если $f(x, y)$ всюду

имеет конечную или бесконечную производную по y, то условие Липшица не выполняется в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ становится бесконечной. Случай, когда функция f непрерывна и $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна, может представиться, например, для иррациональных функций.

Пример 12. Рассмотрим уравнение:

$$y' = y^{\frac{2}{3}}; \tag{19}$$

правая часть $f = y^{\frac{2}{3}}$ определена и непрерывна для всех значений y, но производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$, т. е. *на оси Ox плоскости xOy*; интегрируя данное уравнение, находим общее решение: $27y = (x + C)^3$ — семейство кубических парабол; кроме того, уравнение имеет очевидное решение $y = 0$, проходящее через те точки, где не выполнено условие Липшица; это решение — особое, так как через каждую точку оси Ox проходит и кубическая парабола, и эта прямая — единственность не выполнена (черт. 18).



Черт. 18.

Пример 13. Вернёмся к уравнению

$$y'^2 + y^2 = 1$$

или

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

(черт. 16). Оба значения y' представляют непрерывные функции в области $-1 \leqslant y \leqslant 1$, где правая часть определена; производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$; условия теоремы Коши нарушаются на прямых $y = \pm 1$, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$; эти прямые a priori могут быть особыми решениями. Легко видеть, что $y = 1$ и $y = -1$ суть решения этого уравнения и что эти прямые являются огибающими семейства синусоид $y = \sin(x + C)$, дающего общее решение, т. е. в точках прямых, изображающих решения $y = \pm 1$, единственность не выполнена: через каждую точку, например прямой $y = 1$, проходят две интегральные кривые — сама прямая $y = 1$ и касающаяся её (восходящая или нисходящая) ветвь

синусоиды; это будут особые решения для обоих уравнений: $y' = +\sqrt{1-y^2}$ и $y' = -\sqrt{1-y^2}$.

Примечание. Мы уже указали, что из теоремы Коши можно вывести только необходимые условия для особого решения. Место тех точек, где условие Липшица не выполнено, если оно является кривой, может представлять особое решение, но может и не представлять его уже потому, что эта кривая, вообще говоря, не представляет решения уравнения. Если, например, вместо уравнения (19) взять такое:

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} + a, \quad a \neq 0,$$

то $y = 0$ попрежнему есть место точек, где не выполняется условие Липшица, но эта прямая не является решением уравнения, что очевидно из непосредственной подстановки в заданное уравнение.

Итак, *чтобы найти особые решения уравнения* (18), *надо найти место точек, где не выполнено условие Липшица* (т. е. в случае правой части, выраженной в элементарных функциях, место тех точек, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна); *если это место образует одну или несколько кривых, надо проверить, являются ли эти кривые интегральными кривыми уравнения* (18) *и нарушается ли в каждой их точке свойство единственности; если оба эти условия выполнены, то найденная кривая представляет особое решение.*

ЗАДАЧИ.

Найти место точек, где не выполняется условие Липшица, и исследовать, представляет ли оно особое решение (найти также общее решение).

85. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x}$.

86. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x}+1$ [начертить поле интегральных кривых, принимая в уравнении радикал: 1) как $+\sqrt{y-x}$, 2) как $\pm\sqrt{y-x}$].

87. $\frac{dy}{dx} = +\sqrt{|y|}$, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y}$ (в обоих случаях набросать поле кривых).

88. $\frac{dy}{dx} = y \ln y$ ($y \geqslant 0$; при $y = 0$ правая часть дополняется до непрерывной функции по правилу Лопиталя).

89. $\frac{dy}{dx} = y(\ln y)^2$ (с тем же условием о дополнении правой части).

90. $\frac{dy}{dx} = -x \pm \sqrt{x^2+2y}$ (начертить поле кривых).

Для уравнения

$$y' = f(y) \tag{A}$$

существует *необходимый и достаточный признак особых решений.* В § 2 главы I мы видели, что если $f(y_0) \neq 0$, то начальные значения (x_0, y_0)

определяют единственную интегральную кривую, даже если не требовать, чтобы правая часть удовлетворяла условию Липшица; соответствующие решения будут обыкновенными частными решениями. Далее, если $f(C)=0$, то

$$y = C \tag{B}$$

является решением уравнения (A). Исследуем, при каких условиях в точках решения (B) выполняется единственность и при каких она не выполняется.

Возьмём начальные значения (x_0, y_0), $y_0 < C$, и допустим, что $f(y) > 0$ при $y_0 \leqslant y < C$ (случай $y > C$ приводится к этому заменой y на $-y$, а случай $f(y) < 0$ заменой x на $-x$). Мы будем исследовать единственность решения $y = C$ лишь по отношению к интегральным кривым в полосе $y_0 \leqslant y \leqslant C$. Интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), даётся формулой:

$$x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}. \tag{C}$$

Будем в формуле (C) стремить y к C; интеграл в правой части будет несобственным; возможны два случая: 1° $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}$ расходится; 2° $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}$ сходится.

В случае 1° формула (C) показывает, что при неограниченном приближении y к C переменное x неограниченно увеличивается; интегральная кривая асимптотически приближается к прямой $y = C$ при неограниченном возрастании x и не имеет с ней общих точек ни при каком конечном значении x. Так как все интегральные кривые, лежащие в полосе $y_0 \leqslant y < C$, получаются из кривой (C) переносом параллельно оси Ox, то ни одна из них не имеет общих точек с прямой $y = C$; следовательно, во всех точках решения $y = C$ выполняется единственность. Итак, *если* $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}$ *расходится, то решение* $y = C$ *обыкновенное.* Примерами этого случая являются решения $y = 0$ для уравнения $y' = y^k$, $k \geqslant 1$, и для уравнения задачи 88 (где условие Липшица не выполнено).

Переходим к случаю 2°. Пусть $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)} = l < \infty$. При значении $x = x_0 + l = \bar{x}$ кривая (C) приходит в точку M с координатами $(\bar{x}, C)$, лежащую на решении $y = C$; таким образом, в этой точке единственность нарушается. Путём изменения начальной точки x_0 (т. е. переносом кривой (C) параллельно оси x) мы можем точку M совместить с любой точкой прямой $y = C$; таким образом, свойство единственности не выполнено ни для одной точки решения $y = C$.

Итак, *если* $\int\limits_{y_0}^{C} \frac{dy}{f(y)}$ *сходится, то решение* $y = C$ *особое.* Примерами могут служить уравнения $y' = y^k$, $0 < k < 1$, и уравнение задачи 89.

Аналогичный критерий можно вывести для решений вида $y = C$ общего уравнения с разделяющимися переменными и для решений вида $y = Cx$ однородного уравнения; несколько сложнее проводится исследование решений вида $y = \varphi(C_0)x + \psi(C_0)$ уравнения Лагранжа (§ 3, **3**, стр. 116).

2. Мы видели, что простейший случай, когда правая часть уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ непрерывна, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна, встречается, когда f является иррациональной функцией от y. Освобождаясь от этих иррациональностей, мы получим алгебраическое уравнение степени выше первой относительно y' с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от y. Естественно поставить вопрос об отыскании особых решений такого уравнения. Здесь можно получить довольно общие результаты, к изложению которых мы сейчас приступаем.

Пусть дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y')=0 \tag{1}$$

будет алгебраическое, n-й степени относительно y', т. е. имеет вид

$$A_n(x, y)y'^n+\ldots+A_1(x, y)y'+A_0(x, y)=0, \tag{1'}$$

причём левая часть представляет неприводимый многочлен по y'; коэффициенты $A_k(x, y)$ мы предполагаем многочленами по y и по x (достаточно было бы допустить, что $A_k(x, y)$ непрерывны по переменным x, y в некоторой области D и допускают в ней частные производные по x и по y). Как уже указывалось в начале настоящей главы, уравнение (1') определяет n ветвей многозначной функции:

$$y'_i=f_i(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

мы будем рассматривать только действительные ветви (2). Все эти ветви являются непрерывными функциями от x и y для тех значений этих переменных, которые не обращают в нуль $A_n(x, y)$ [1]).

Посмотрим, как для этих ветвей обстоит дело с условиями Липшица. Для вычисления производной $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv\frac{\partial y'}{\partial y}$ воспользуемся уравнением (1) и правилом дифференцирования неявной функции; находим:

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial y'}. \tag{20}$$

Так как все коэффициенты $A_k(x, y)$ являются дифференцируемыми по y, то производная (20) конечна и непрерывна всюду, где $A_n\neq 0$ и где знаменатель не равен нулю, т. е. те значения x, y, для которых может не выполняться условие Липшица, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}=0, \tag{21}$$

[1]) В тех точках плоскости xOy, где $A_n(x, y)=0$, одна или несколько функций (2) обращаются в бесконечность; если мы сделаем x искомой функцией, а y — независимым переменным, то в этих точках соответствующие значения $\frac{dx}{dy}$ будут обращаться в нуль; зато эта последняя производная обращается в бесконечность в точках, где $A_0(x, y)=0$.

где после выполнения дифференцирования в левой части вместо y' надо взять одну из функций $f_i(x, y)$, определённую уравнением (1). Иначе говоря, чтобы получить уравнение геометрического места тех точек плоскости xOy, где условие Липшица не выполняется, надо исключить y' из уравнений (1) и (21). В высшей алгебре даётся процесс исключения одного переменного из двух алгебраических уравнений при помощи рациональных операций — получение так называемого *результанта* этих уравнений; равенство нулю результанта есть условие существования общих корней двух уравнений. В нашем случае левая часть уравнения (21) есть производная по y' от левой части уравнения (1); результант этих уравнений есть *дискриминант уравнения* (1) *относительно* y'. Равенство нулю дискриминанта есть условие существования общего нуля данного многочлена и его производной, т. е. кратного корня уравнения (1), где в качестве неизвестного рассматривается y'. Исключая y' из (1) и (21), мы придём к уравнению:

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{22}$$

которое, вообще говоря, определит одну или несколько кривых [*дискриминантная кривая уравнения* (1)].

Дискриминантная кривая (или их совокупность) разделяет плоскость xy на некоторое количество областей. Внутри каждой такой области G некоторое число $k\,(k \geqslant 0)$ из n ветвей (2) являются действительными; это число одно и то же для всей области. Во всякой области, лежащей вместе с границей внутри G, знаменатель в правой части выражения (20) по абсолютной величине больше некоторого положительного числа, следовательно, $\frac{\partial y'}{\partial y}$ ограничена; условие Липшица для всех k ветвей (2) выполнено; таким образом, через каждую точку области G проходит k интегральных кривых, в согласии с теоремой существования; для особых решений здесь нет места. (Отметим, что все k интегральных кривых имеют в точке x, y различные касательные, так как между значениями (2) для y' нет равных.)

В точках дискриминантной кривой две или более ветвей функции y', определяемой уравнениями (2), становятся равными между собой, по самому определению дискриминанта; кроме того, в силу формулы (20), на дискриминантной кривой, вообще говоря, не удовлетворяются условия Липшица. Дополним теперь область G её границей, состоящей из дискриминантных кривых или их частей; в полученной таким образом замкнутой области G каждая из ветвей (2) попрежнему будет непрерывной функцией от x, y, но условия Липшица не выполнены на границе. Мы находимся в таких условиях, когда может существовать особое решение. Именно, пусть y как функция x,

$$y = \varphi(x), \tag{23}$$

определённая из уравнения (22) дискриминантной кривой, сама является решением дифференциального уравнения (1), и пусть совокупность решений рассматриваемой ветви (2), определённая внутри области G, может быть продолжена до её границы, т. е. вплоть до всех точек кривой (23); тогда через каждую точку кривой (23) проходят два решения, соответствующих рассматриваемой ветви: во-первых, одна интегральная кривая, продолженная изнутри области G — обыкновенное решение, и, во-вторых, — решение (23), которое является, таким образом, особым решением.

Итак, особыми решениями уравнения (1) могут быть только функции

$$y = \varphi(x), \tag{23}$$

определяемые уравнением (22). Вообще говоря, эти функции, однако, не удовлетворяют данному дифференциальному уравнению, т. е. не являются вовсе решениями уравнения (1); в том, какой из этих случаев имеет место, легко убедиться непосредственной проверкой. Иногда может, далее, случиться, что вдоль такого решения (23) удовлетворяется во всех его точках свойство единственности (для данной ветви). Это будет в случае, если решения, определённые внутри области G, не доходят до её границы: тогда мы имеем дело с частным решением. Можно показать, что этот случай является исключительным; в общем случае, если функция (23), полученная из дискриминантной кривой (22), удовлетворяет дифференциальному уравнению (1′), она является особым решением. Итак, мы получаем следующее правило нахождения особого решения:

Если дано уравнение:

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

где левая часть есть многочлен по p, то составляем уравнение:

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0; \tag{21}$$

исключая p из уравнений (1) *и* (21), *получаем уравнение* (22), *определяющее дискриминантную кривую. Если определяемая этим уравнением функция* (23) *является решением дифференциального уравнения* (1), *то решение* (вообще говоря) *особое.*

Рассмотрим несколько прежних и новых примеров с точки зрения применения этого метода.

Пример 14. $F \equiv y'^2 + y^2 - 1 = 0$ (пример 2); $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$.

Из этих двух уравнений получаем $y^2 = 1$, т. е. $y = \pm 1$. Обе эти функции, очевидно, удовлетворяют данному дифференциальному уравнению, т. е. это — решения; они являются особыми решениями, так как это — огибающие семейства синусоид, и в их точках

нарушается свойство единственности по отношению к каждой из двух ветвей уравнения; через каждую точку $x=x_0$, $y=1$ проходит, например, для ветви уравнения $y'=+\sqrt{1-y^2}$ два решения: прямая $y=1$ и ветвь синусоиды

$$y=\sin\left(x-x_0+\frac{\pi}{2}\right),\quad x_0-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant x_0+\frac{\pi}{2}.$$

Пример 15. $F\equiv xp^2-2yp+4x=0$ (пример 3). Составляем уравнение $\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\equiv xp-y=0$. Исключаем p, определяя его из второго уравнения и подставляя в первое:

$$p=\frac{y}{x},\quad x\frac{y^2}{x^2}-2y\frac{y}{x}+4x=0 \text{ или } y^2-4x^2=0;$$

$$1)\ y=2x,\quad 2)\ y=-2x.$$

Из черт. 17 (стр. 109) видно, что эти две прямые — огибающие семейства парабол, представляющего общее решение — являются особым решением. Заметим ещё, что, решая в § 1 данное уравнение относительно y', мы получали выражение y^2-4x^2 под знаком радикала; этого и следовало ожидать, так как в решении квадратного уравнения подкоренное выражение есть дискриминант.

Черт. 19.

Пример 16. $x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3$. Методом дифференцирования по x находим общий интеграл: $(y-C)^2=(x-C)^3$. Для получения дискриминантной кривой дифференцируем данное уравнение по p:

$$\frac{8}{9}(p-p^2)=0.$$

Вставляя значения $p=0$ и $p=1$ в уравнение, находим:

$$1)\ x-y=0,$$

$$2)\ x-y=\frac{4}{27}.$$

Геометрическое истолкование: общий интеграл есть семейство полукубических парабол (черт. 19); прямая $x-y=\frac{4}{27}$ есть огибающая — особое решение; прямая $y=x$ есть геометрическое место *точек возврата и решением не является.*

Пример 17. $p^2 - y^3 = 0$. Общее решение: $y = \frac{4}{(x+C)^2}$; дискриминант $y^3 = 0$ даёт решение $y = 0$, которое является частным, так как условие единственности выполнено во всех точках оси Ox (решения, определённые в области G, $y > 0$, не доходят до дискриминантной кривой).

Примечание 1. Для определения того, является ли функция (23), получаемая из дискриминантной кривой, решением уравнения (1), мы рекомендовали непосредственно подставить найденное значение функции в уравнение (1). Можно дать другой способ этой проверки. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$, полученная из дискриминантной кривой, есть решение уравнения (1), т. е. по подстановке в это уравнение обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0.$$

Но $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ в силу уравнения (21), из которого вместе с (1) определялась функция (23); следовательно, если (23) есть решение уравнения (1), то оно удовлетворяет также уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{24}$$

Таким образом, особое решение должно удовлетворять одновременно трём уравнениям: (1), (21), (24). Отсюда, между прочим, следует, что уравнение (1) в «общем случае» не имеет особого решения: если эти три уравнения независимы, то они определяют отдельные системы значений (x, y, y'). Особое решение может существовать лишь в том случае, если одно из этих уравнений, например (24), есть следствие двух других. В этом случае напишем уравнения (1) и (21) в форме:

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

Из них определятся функции: $y = \varphi(x)$, $p = \psi(x)$. Предполагая их подставленными в уравнение (1), дифференцируем его по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial p} \psi'(x) = 0,$$

или, в силу уравнения (21),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'(x) = 0.$$

Третье уравнение (24), являющееся, по предположению, следствием двух первых, в наших теперешних обозначениях напишется так:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} p = 0.$$

Сравнивая его с последним тождеством, находим:

$$p = \varphi'(x) = y',$$

т. е. действительно, $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (1).

Применим этот критерий к уравнению Клеро. Это уравнение имеет вид:

$$y = px + \varphi(p);$$

уравнения (21) и (24), соответственно, будут таковы:

$$0 = x + \varphi'(p), \quad p - p = 0,$$

и, действительно, три уравнения сводятся к двум независимым.

Примечание 2. В § 1 было указано, что если два комплексно сопряжённых решения y' уравнения (1) переходят при непрерывном изменении x, y в действительные, то в момент перехода они становятся равными; та часть дискриминантной кривой, на которой осуществляется это равенство корней, отделяет, таким образом, область плоскости, где число действительных ветвей (2) равно k, от области, где это число равно $k \pm 2$. Так, например, для уравнения $y'^2 + y^2 = 1$ (черт. 16 на стр. 107) дискриминантные прямые $y = \pm 1$ отделяют ту часть плоскости ($|y| < 1$), где уравнение имеет действительные значения $y' = \pm \sqrt{1-y^2}$, от той части ($|y| > 1$), где оба корня мнимые: $y' = \pm i \sqrt{y^2 - 1}$. В примере 16 (черт. 19) мы видим, что две ветви дискриминантной кривой $y - x = 0$ и $y - x = \frac{-4}{27}$ разделяют плоскость на три полосы; в средней через каждую точку проходят три кривых семейства, а в двух крайних — по одной.

Примечание 3. Если дискриминантная кривая является особым решением, то она есть огибающая обыкновенных решений (по определению, огибающая касается в каждой своей точке одной из огибаемых кривых). Обычно огибающая является также местом предельного положения точек пересечения двух бесконечно близких кривых семейства; в таком случае по одну её сторону в окрестности каждой её точки пересекаются две интегральные кривые, которые в нашем изложении должны быть рассматриваемы как относящиеся к двум различным ветвям (2) уравнения (1); по другую сторону огибающей этих ветвей нет, т. е. число действительных ветвей уравнения (1) при переходе через особое решение в этом случае уменьшается на две единицы.

Но пример 16 показывает, что *дискриминантная кривая может давать* также *геометрическое место точек возврата*; в аналитической теории дифференциальных уравнений показывается, что этот случай является общим, если исходить из произвольного уравнения (1); так, например, для уравнения Лагранжа дискриминантная кривая, вообще, есть место точек возврата; для частного случая — уравнения Клеро — она всегда является огибающей. Наконец, может случиться, что в выражении (20) для некоторых ветвей (2) уравнения (1) на одной из дискриминантных кривых одновременно со знаменателем обращается в нуль и числитель и притом так, что $\frac{\partial y'}{\partial y}$ остаётся для этих ветвей непрерывной функцией от x, y; тогда каждая из рассматриваемых ветвей не имеет на ней никаких особенностей. *Дискриминантная кривая* в этом случае оказывается *геометрическим местом точек прикосновения интегральных кривых*, соответствующих различным ветвям (2) уравнения (1).

Пример 18. Рассмотрим уравнение:

$$p^2[(x-y)^2 - 1] - 2p + [(x-y)^2 - 1] = 0.$$

Решая относительно y и дифференцируя по x, находим общее решение $(x-C)^2 + (y-C)^2 = 1$. Находим дискриминантную кривую; уравнение $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ даёт:

$$p[(x-y)^2 - 1] - 1 = 0;$$

отсюда определяем p и вставляем в уравнение, умножив затем на знаменатель $\left(\text{приравненный нулю, он даёт место точек, где для одной из ветвей } \frac{dy}{dx}=\infty\right)$; получим:

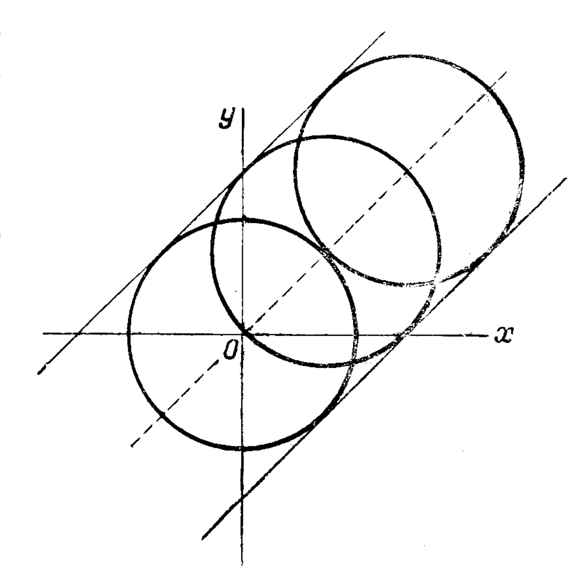
$$1-2+[(x-y)^2-1]^2=0,$$

или

$$[(x-y)^2-2](x-y)^2=0.$$

Дискриминантная кривая распадается на три прямые: $x-y=\pm\sqrt{2}$ дают решения (особые); прямая $y=x$ не даёт решения.

Геометрическое истолкование: общее решение есть семейство кругов радиуса 1 с центрами на прямой $y=x$ (черт. 20); прямые $y=x\pm\sqrt{2}$ суть огибающие семейства; прямая $y=x$ есть место точек прикосновения двух различных кривых семейства; она тоже даётся частью дискриминантной кривой, так как касательные к двум различным кривым совпадают, следовательно, уравнение для p должно иметь кратный корень (заметим без доказательства, что местом точек прикосновения может служить только такая кривая $\varphi(x, y)=0$, левая часть уравнения которой $\varphi(x, y)$ входит в дискриминант в степени не ниже второй; у нас $y-x$ входило в дискриминант в квадрате).



Черт. 20.

Итак, резюмируем: *для уравнения вида* (1) *особое решение может состоять только из точек дискриминантной кривой, но дискриминантная кривая может являться также местом точек возврата интегральных кривых и местом точек прикосновения различных интегральных кривых.*

Примечание 4. В большинстве курсов особое решение определяется формально — как такое, которое не получается из общего решения ни при каком значении произвольного постоянного. Но мы умеем доказывать существование общего решения (глава II, § 1) лишь для тех областей плоскости xOy, где выполнены условия теоремы Коши. Поэтому для того решения, вдоль которого эти условия не выполняются, мы не можем сослаться без дальнейших пояснений на существование общего решения. С другой стороны, формулой, дающей общее решение, иногда не охватываются те решения, вдоль которых выполнены условия теоремы Коши и которые со всех точек зрения должны считаться обыкновенными (например, интегральные прямые уравнения Лагранжа). Поэтому мы считаем обычное определение недостаточно точным и заменяем его данным в тексте; при этом некоторые

решения, которые с формальной точки зрения представляются обыкновенными, с нашей точки зрения окажутся особыми.

Пример 19. Рассмотрим уравнение примера 8:

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0.$$

Дифференцируем по $p: 3p^2 - 4xy = 0$. Исключаем из обоих уравнений p и, освобождаясь от иррациональностей, получаем дискриминантные кривые: $4x^3y^3 - 27y^4 = 0$ или $y = 0$, $y = \frac{4}{27}x^3$. Общее решение: $y = C(x - C)^2$; обе дискриминантные кривые являются огибающими этого семейства парабол и представляют особые решения, но первая из них получается из формулы, дающей общее решение, при $C = 0$.

3. Изложенный в предыдущем разделе способ нахождения особых решений сводится к алгебраическим операциям — дифференцированию (многочлена) и исключению; если данное уравнение алгебраическое по x, y, y', то и особое решение является алгебраическим; мы его всегда можем найти, даже если не умеем интегрировать уравнения (1). Второй метод нахождения особых решений, который мы сейчас изложим, требует знания общего интеграла дифференциального уравнения. Пусть общий интеграл уравнения (1) есть

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{25}$$

Если семейство кривых, изображаемое уравнением (25), имеет огибающую, то эта огибающая:

1) является решением дифференциального уравнения; в самом деле, в каждой точке огибающей элемент (x, y, y') совпадает с элементом одной из интегральных кривых семейства (25); а так как интегральные кривые семейства (25) суть решения уравнения (1), то все элементы огибающей также удовлетворяют этому уравнению, т. е. огибающая есть решение;

2) даёт особое решение; в самом деле, рассмотрим семейство, состоящее из дуг интегральных кривых до точки прикосновения с огибающей (например, семейство возрастающих ветвей синусоид в примере 2); через каждую точку некоторой окрестности огибающей проходит одна такая кривая; эти кривые соответствуют полю, определённому одной из ветвей (2) уравнения (1); в точках огибающей единственность нарушается, так как через каждую её точку проходят две интегральные кривые с общей касательной — сама огибающая и касающаяся её кривая семейства.

Отсюда правило нахождения **особого** решения, если известен общий интеграл (25), таково же, как для нахождения огибающей: *дифференцируем уравнение* (25) *по параметру* C:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{26}$$

Из уравнений (25) *и* (26) *исключаем C; полученное соотношение*

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{27}$$

(если оно представляет решение) *даёт особое решение.*

Примечание 1. Из дифференциальной геометрии известно, что уравнение (27) даёт не только огибающую, но и геометрическое место кратных точек кривых семейства (25) (узловые точки, точки возврата и пр.) — в том случае, когда вдоль кривой (27) мы имеем также

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{28}$$

Примечание 2. В конце предыдущего раздела мы указывали, что существование особого решения для уравнения (1) является исключительным случаем; из рассуждений настоящего раздела можно было бы вывести противоречащее предыдущему заключение, что «в общем случае» уравнение (1) имеет особое решение, так как при наличии соответствующих производных и возможности исключения постоянного C уравнения (25), (26) дают огибающую, кроме случая, который является «исключительным», когда одновременно с уравнениями (25), (26) выполняются уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$; только в этом случае мы получаем не огибающую, а геометрическое место особых точек. Кажущееся противоречие объясняется тем, что «общему» уравнению (1) соответствует частный класс семейств (25), именно тот, где исключение C из равенств (25) и (26) даёт не огибающую, а место точек возврата.

Примечание 3. Можно показать, что огибающая всегда является частью дискриминантной кривой (22). В самом деле, пусть через точку (x_0, y_0) проходит кривая семейства (25) $y = \psi(x)$ и огибающая $Y = \Psi(x)$. Если подставить обе функции в уравнение (1), то, по доказанному, получим два тождества:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, Y, Y') = 0. \tag{29}$$

Дифференцируя эти тождества по x, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0, \\ \frac{\partial F(x, Y, Y')}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} Y' + \frac{\partial F}{\partial Y'} Y'' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Рассмотрим тождества (30) в точке (x_0, y_0). По предположению, мы имеем $y'_0 = \psi'(x_0) = Y'_0 = \Psi'(x_0)$; из тождеств (30), после подстановки $x = x_0$ получим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_0, y_0, y'_0} (y''_0 - Y''_0) = 0.$$

Если $y_0'' \neq Y_0''$, то имеем $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$; это рассуждение справедливо для всех элементов огибающей, т. е. мы получаем вдоль огибающей уравнение (21), определяющее вместе с (1) дискриминантную кривую. Если бы было

$$y_0'' = Y_0'', \ \ldots, \ y_0^{(n-1)} = Y_0^{(n-1)}, \text{ но } y_0^{(n)} \neq Y_0^{(n)},$$

то, дифференцируя тождества (29) $n-1$ раз и вычитая одно из другого, мы опять получили бы $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

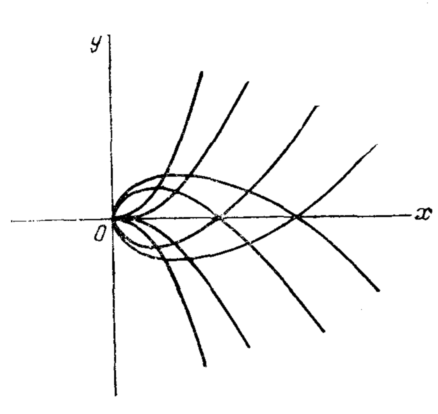
Пример 20. Вернёмся к примеру 2; $p^2 + y^2 = 1$. Общее решение: $y = \sin(x + C)$; огибающая получится из этого уравнения и другого: $0 = \cos(x + C)$. Исключая C, находим огибающую $y^2 = 1$, в согласии с решением примера 14.

Пример 21. Уравнение примера 18: общее решение есть $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$; дифференцируем по C; $x - C + y - C = 0$, $C = \frac{x+y}{2}$; подставляя в общее решение, находим: $(x - y)^2 = 2$, две огибающие прямые.

Пример 22. Уравнение примера 16: общий интеграл $(y - C)^2 = (x - C)^3$. Находим логарифмическую производную по C: $\frac{2}{y - C} = \frac{3}{x - C}$, откуда $C = 3y - 2x$; подставляя в общий интеграл, получаем:

$$4(y - x)^2 + 27(y - x)^3 = 0.$$

Прямая $y = x$ есть геометрическое место точек возврата; $x - y = \frac{4}{27}$ есть огибающая (черт. 19 на стр. 128).



Черт. 21.

Пример 23.

$$(2xy' - y)^2 - 4x^3 = 0.$$

Разрешая относительно y', получаем линейное уравнение: $y' = \frac{y}{2x} + x^{\frac{1}{2}}$; общее решение: $y^2 = x(x - C)^2$; дифференцируем это уравнение по C, $x(x - C) = 0$; подставляя значение C в общее решение, находим: $y^2 = 0$. Мы получили не огибающую, т. е. не особое решение, а геометрическое место особых точек (узловых; изолированные точки $x = C$, $y = 0$ при $C < 0$ не идут в счёт, так как уравнение не определено при $x < 0$) (рис. 21).

ЗАДАЧИ.

Найти особые решения, исходя из дифференциального уравнения и из общего интеграла:

91. $xp^2-2yp+4x=0$ (пример 3, стр. 109).
92. $xp^3+2xp-y=0$ (начертить поле кривых; задача 68, стр. 109).
93. $y^2(p-1)=(2-p)^2$ (задача 73, стр. 112, начертить кривые).
94. $p^4=4y(xp-2y)^2$ (задача 75, стр. 120, исследовать решения $y=0$).
95. $x^2p^2-2xyp+2xy=0$.
96. $y=p^2-px+\frac{x^2}{2}$ (пример 9, стр. 115).
97. $y=2px+\frac{x^2}{2}+p^2$ (задача 76, стр. 120).
98. $p^2-py+e^x=0$ (общее и особое решение).

§ 5. Задача о траекториях.

Эта задача является важным геометрическим приложением дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Пусть дано семейство плоских кривых

$$F(x,\ y,\ a)=0, \tag{31}$$

зависящее от одного параметра a; *кривая, образующая в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку кривой семейства* (31), *называется изогональной траекторией этого семейства*; если, в частности, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, мы имеем *ортогональную траекторию*. Будем считать семейство (31) данным и разыскивать его изогональные траектории.

Черт. 22.

Обозначим текущие координаты траектории через x_1, y_1. Пусть сначала $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$; обозначая $\operatorname{tg}\alpha=k$, имеем в любой точке траектории: $\varphi_1-\varphi=\alpha$, где φ есть угол с осью x касательной к кривой семейства, φ_1 — то же для траектории (черт. 22), т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=k, \text{ или } \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\frac{dy}{dx}}=k. \tag{32}$$

Равенство (32) имеет место в любой точке $(x_1,\ y_1)$ траектории; но для проходящей через эту точку кривой семейства угловой

коэффициент $\frac{dy}{dx}$ вычисляется из уравнения (31):

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

где вместо x, y надо подставить x_1, y_1.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (32), получаем:

$$\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}-\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}\frac{dy_1}{dx_1}}=k. \qquad (33)$$

В это уравнение входит параметр a, который изменяется от точки к точке траектории и характеризует ту кривую семейства, которую траектория пересекает в данной точке; его значение для точки x_1, y_1 получится из уравнения (31), если в нём положить $x=x_1$, $y=y_1$:

$$F(x_1, y_1, a)=0. \qquad (31')$$

Исключая a из двух уравнений (31′) и (33), мы получим соотношение

$$\Phi\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right)=0, \qquad (34)$$

связывающее координаты точки траектории и угловой коэффициент касательной; следовательно, уравнение (34) есть *дифференциальное уравнение изогональных траекторий* семейства (31). Общий интеграл уравнения (34):

$$\Psi(x_1, y_1, C)=0$$

даёт *семейство от одного параметра изогональных траекторий.*

Если $a=\frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=-\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

следовательно, вместо уравнения (33) получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1}\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}-\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}=0. \qquad (33')$$

Дифференциальное уравнение ортогональных траекторий получится исключением параметра a из уравнений (31′) и (33′).

2. Рассуждения и выкладки упрощаются, если само исходное семейство кривых задано дифференциальным уравнением:

$$\Phi_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{34'}$$

Уравнение (34′) ставит в соответствие каждой точке (x, y) одно или несколько значений $\frac{dy}{dx}$, определяющих поле направлений данного семейства. Мы можем положить $x=x_1$, $y=y_1$; направление поля для изогональных траекторий связано с направлением поля для данного семейства соотношением (32), откуда, разрешая относительно $\frac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\cdot\frac{dy_1}{dx_1}+1}.$$

Вставляя это выражение в уравнение (34′), с заменой в нём x, y соответственно на x_1, y_1, получаем уравнение поля для семейства изогональных траекторий, т. е. их дифференциальное уравнение:

$$\Phi_1\left(x_1,\ y_1,\ \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\cdot\frac{dy_1}{dx_1}+1}\right)=0. \tag{35}$$

В случае ортогональных траекторий $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dx_1}$ связаны соотношением:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}},$$

откуда дифференциальное уравнение для ортогональных траекторий будет:

$$\Phi_1\left(x_1,\ \ y_1,\ \frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0. \tag{35'}$$

Примечание. В дальнейшем мы будем отбрасывать индексы и обозначать координаты точки траектории также через x, y там, где это не может вызвать путаницы.

Пример 24. Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат: $y = ax$. Пусть угол пересечения $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = k$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k;$$

заменяя $\frac{dy}{dx}$ его значением a, которое, в силу уравнения семейства, равно $\frac{y_1}{x_1}$, получаем (опуская индексы):

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = k, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}.$$

Это уравнение однородное, но оно проще интегрируется при помощи интегрирующего множителя:

$$x\,dy - y\,dx = k\,(x\,dx + y\,dy),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{k}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln C,$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

или, наконец, в полярных координатах: $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$ (семейство логарифмических спиралей).

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}}, \quad \text{или} \quad x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1 = 0,$$

откуда $x_1^2 + y_1^2 = C$, т. е. мы получили семейство окружностей.

Пример 25. Имеем семейство софокусных эллипсов с фокусами в точках $x = \pm 1$, $y = 0$:

$$\frac{x^2}{1 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1 \quad (\lambda > 0).$$

Их дифференциальное уравнение будет (глава I, задача 6, стр. 15):

$$(xy' - y)(x + yy') = y',$$

или

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0.$$

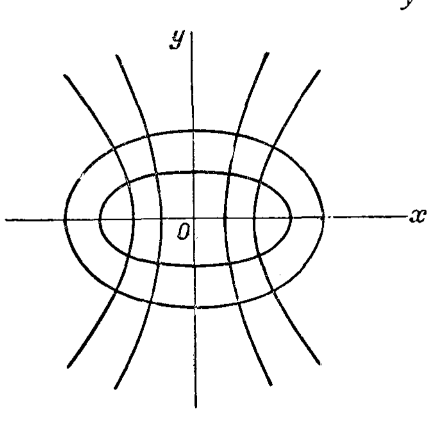
Чтобы получить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий, достаточно заменить в этом уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$; мы получаем:

$$\frac{xy}{y'^2} - \frac{x^2 - y^2 - 1}{y'} - xy = 0,$$

или

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - - xy = 0,$$

т. е. то же уравнение. Дело объясняется тем, что данное уравнение — второй степени относительно y; через каждую точку проходят две кривые — одна из них эллипс (соответствует $\lambda > 0$), а другая — софокусная гипербола ($-1 < \lambda < 0$), причём софокусные гиперболы нашего семейства суть ортогональные траектории софокусных эллипсов (черт. 23).



Черт. 23.

ЗАДАЧИ.

99. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$ (сделать чертёж).

100. Найти изогональные (под углом α, $\operatorname{tg} \alpha = k$) траектории семейства кругов $x^2 + y^2 = a^2$.

101. Найти ортогональные траектории семейства подобных кривых второго порядка $x^2 + ny^2 = a$ (n — постоянное).

102. Найти ортогональные траектории семейства лемнискат

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

103. Найти кривые, пересекающие под углом α семейство кардиоид $\rho = \alpha(1 + \cos\theta)$.

Указание. Вывести уравнения изогональных траекторий для полярных координат.

104. Найти ортогональные траектории семейства софокусных парабол.

105. Провести решение задачи 102 в полярных координатах.

ГЛАВА IV.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

§ 1. Теорема существования.

1. Мы будем попрежнему обозначать независимое переменное через x, искомую функцию через y. Дифференциальное уравнение n-го порядка ($n > 1$) имеет вид:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F есть непрерывная функция всех своих аргументов, при этом левая часть, во всяком случае, зависит от старшей производной $y^{(n)}$. Вблизи начальных значений $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$, удовлетворяющих условиям:

$$F(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) = 0, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)_{x=x_0,\ y=y_0,\ \ldots,\ y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

мы можем, по теореме о существовании неявной функции, разрешить уравнение (1) относительно $y^{(n)}$ и представить его в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

Мы докажем существование и единственность (при некоторых условиях) решения уравнения (1′), определяемого начальными условиями: при $x = x_0$ имеем:

$$y = y_0, \ y' = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — данные числа [1]).

Для доказательства существования целесообразно заменить уравнение (1′) системой n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями. Для осу-

---

[1]) Задачу отыскания решения уравнения (1′), удовлетворяющего условиям (2), мы будем называть *задачей Коши*. Это замечание относится также и к случаю $n = 1$ (уравнение первого порядка).

ществления этой замены мы, наряду с искомой функцией y, вводим ещё $n-1$ вспомогательных искомых функций

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1},$$

связанных с y и между собой соотношениями:

$$\frac{dy}{dx}=y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}=y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следует, что функция y_k является k-й производной от функции y,

$$y_k=\frac{d^ky}{dx^k}=y^{(k)} \quad (k=1, 2, \ldots, n-1).$$

Поэтому мы имеем: $y^{(n)}=\frac{dy_{n-1}}{dx}$, и уравнение (1′) примет вид:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{3′}$$

Уравнения (3) и (3′) представляют систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями $y, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}$. В левых частях этих уравнений стоят производные от искомых функций, правые части зависят от независимого переменного и искомых функций (и не зависят от производных). Система такого вида называется *системой n дифференциальных уравнений нормальной формы*.

Однако система (3) и (3′) имеет ту особенность, что только в последнем уравнении правая часть есть функция от $x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ наиболее общего вида; в уравнениях (3) правые части имеют специальную форму. В целях наибольшей симметрии и имея в виду, что системы дифференциальных уравнений будут самостоятельным объектом нашего изучения (глава VII), мы проведём доказательство существования для системы n дифференциальных уравнений первого порядка нормальной формы в наиболее общем виде; при этом для полной симметрии в обозначениях мы вместо обозначений y, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ для искомых функций введём обозначения:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Таким образом, мы будем рассматривать систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Для доказательства существования решения системы n дифференциальных уравнений нормальной формы (4) мы применим метод последовательных приближений Пикара, причём доказательство будет непосредственным обобщением того, которое было дано в главе II для одного уравнения первого порядка.

Пусть для системы (4) задана система начальных значений x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$. Мы введём следующие предположения относительно правых частей уравнений (4):

1) *Функции* f_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ *непрерывны по всем аргументам в замкнутой области*

$$D:\quad x_0-a \leqslant x \leqslant x_0+a, \quad y_i^{(0)}-b \leqslant y_i \leqslant y_i^{(0)}+b \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Из непрерывности функций f_i в области D следует их ограниченность, т. е. существование такого положительного числа M, что $|f_i| \leqslant M$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ для значений аргументов, принадлежащих D.

2) В области D *эти функции удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов* $y_1, y_2, \ldots, y_n$: если при данном x значения $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ и $y_1'', y_2'', \ldots, y_n''$ суть две какие-нибудь системы значений, принадлежащие области D, то имеют место неравенства:

$$|f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n')-f_i(x, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')| \leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1'-y_1''|+|y_2'-y_2''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где K есть некоторое постоянное положительное число.

Заметим, что если функции f_i имеют в области D непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то, по теореме о конечном приращении, имеем:

$$f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n')-f_i(x, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')=$$
$$=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_{\bar{y}_k}(y_1'-y_1'')+\ldots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)_{\bar{y}_k}(y_n'-y_n''), \tag{5'}$$

где знак $(\ \ )_{\bar{y}_k}$ показывает, что аргументы y_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ должны быть заменены через $\bar{y}_k=y_k'+\theta(y_k''-y_k')$, $0<\theta<1$. В силу непрерывности, частные производные являются ограниченными. Мы можем взять наибольшее значение абсолютных величин всех этих производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ в области D за постоянную K и получить из (5′) неравенство вида (5). Таким образом, *условие Липшица выполняется при существовании и непрерывности в* D *частных производных* $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$.

Мы докажем, что в указанных предположениях 1) и 2) *существует одна и только одна система решений уравнений* (4):

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x),$$

определённая для значений x в отрезке $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ и *принимающая при* $x = x_0$ *заданные начальные значения*:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{6}$$

Вычисляем последовательные приближения одновременно для всех искомых функций. За приближения нулевого порядка берём постоянные $y_i^{(0)}$; далее, приближения первого порядка будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(1)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{7_1}$$

Очевидно, что построенные функции являются непрерывными. Покажем, что первые приближения, при $|x - x_0| \leqslant h$, не выходят из области D. В самом деле,

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

(в силу определения числа h).

Далее, определяем вторые приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(2)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(2)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\,dx; \end{aligned}\right\} \tag{7_2}$$

вообще, m-е приближения определяются через приближения $(m-1)$-го порядка такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(m)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{7_m}$$

Допуская, что $(m-1)$-е приближения оказались непрерывными функциями от x, мы видим, что m-е приближения, как неопределённые интегралы от непрерывных функций, также оказываются непрерывными. Легко доказать, что если $(m-1)$-е приближения не выходят из области D при $|x-x_0| \leqslant h$, то это же имеет место для приближений порядка m. В самом деле, в силу предположения о $(m-1)$-х приближениях, мы имеем:

$$|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})| \leqslant M \text{ при } |x-x_0| \leqslant h \ (i=1, 2, \ldots, n);$$

и формулы (7_m) в таком случае дают:

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\, dx \right| \leqslant M|x-x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Так как неравенство доказано для $m=1$, то оно справедливо для любого натурального m. Таким образом, *все последовательные приближения* (7_m) *принадлежат области* D *при изменении* x *в отрезке* $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

Докажем далее, что *последовательные приближения образуют сходящуюся последовательность*, т. е. что $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)$ существует $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Для этого, как и в случае одной функции, рассмотрим ряды:

$$y_i^{(0)} + [y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}] + [y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)] + \ldots$$
$$\ldots + [y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)] + \ldots \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Оценим абсолютные величины членов этих рядов, начиная со второго, пользуясь для этой оценки условием Липшица. Имеем:

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\, dx \right| \leqslant M|x-x_0|,$$

далее,

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})]\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})|\, dx \right|, \tag{8$_1$}$$

и на основании условия Липшица и полученных оценок для $|y_i^{(1)}-y_i^{(0)}|$,

$$|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}K\{|y_1^{(1)}-y_1^{(0)}|+\ldots+|y_n^{(1)}-y_n^{(0)}|\}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}MnK\,|x-x_0|\,dx\right|=MnK\frac{|x-x_0|^2}{2}\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\qquad(8_2)$$

Допустим, что для члена $y_i^{(m-1)}(x)-y_i^{(m-2)}(x)$ мы уже получили оценку:

$$|y_i^{(m-1)}(x)-y_i^{(m-2)}(x)|\leqslant M(nK)^{m-2}\frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!}\qquad(8_{m-1})$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

покажем, что аналогичная оценка, с заменой $m-1$ на m, справедлива для следующего члена. В самом деле,

$$|y_i^{(m)}(x)-y_i^{(m-1)}(x)|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(x,\ y_1^{(m-1)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)})-f_i(x,\ y_1^{(m-2)},\ \ldots,\ y_n^{(m-2)})]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_i(x,\ y_1^{(m-1)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)})-f_i(x,\ y_1^{(m-2)},\ \ldots,\ y_n^{(m-2)})|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{l=1}^{n}|y_l^{(m-1)}-y_l^{(m-2)}|\,dx\right|\leqslant M(nK)^{m-1}\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!}\right|dx=$$

$$=M(nK)^{m-1}\frac{|x-x_0|^m}{m!}.\qquad(8_m)$$

Таким образом, мы доказали, что оценка (8_m) справедлива для всякого натурального m. Замечая далее, что $|x-x_0|\leqslant h$, мы видим, что все члены рядов (8), начиная со второго, соответственно не больше по абсолютной величине, чем члены знакоположительного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}M(nK)^{m-1}\frac{h^m}{m!}.$$

Этот последний ряд, как легко проверить, сходится; следовательно, ряды (8) сходятся равномерно для значений x в отрезке $x_0-h\leqslant\leqslant x\leqslant x_0+h$; так как их члены суть непрерывные функции, то и

суммы их будут функциями непрерывными. Обозначим их через $Y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Мы имеем:

$$Y_i(x)=y_i^{(0)}+\sum_{l=1}^{\infty}(y_i^{(l)}-y_i^{(l-1)})=\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x).$$

Докажем, что *функции* $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, …, $Y_n(x)$ *дают искомую систему решений системы дифференциальных уравнений* (4).

По самому определению $y_i^{(m)}(x)$ [см. (7_m)] мы имеем: $y_i^{(m)}(x_0)=y_i^{(0)}$; следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_0)=Y_i(x_0)=y_i^{(0)},$$

т. е. предельные *функции* $Y_i(x)$ *удовлетворяют начальным условиям.*

Докажем, что эти функции удовлетворяют системе (4). В силу равенств (7_m), мы можем написать:

$$y_i^{(m)}(x)=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, y_1^{(m-1)}(x), \ldots, y_n^{(m-1)}(x))-$$

$$-f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))\}\,dx+\int_{x_0}^{x}f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))\,dx \quad (9)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Оценим абсолютную величину первого интеграла:

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m-1)}-Y_1|+\ldots+|y_n^{(m-1)}-Y_n|\}\,dx\right| \quad (9')$$

(последнее неравенство есть следствие условия Липшица). Так как функции $y_i^{(m-1)}(x)$ $(m=1, 2, \ldots)$ сходятся в интервале (x_0-h, x_0+h) равномерно к $Y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то для любого наперёд заданного ε можно найти такое N, что при $m-1>N$ для всякого значения x в рассматриваемом интервале выполняются неравенства:

$$|y_i^{(m-1)}(x)-Y_i(x)|<\frac{\varepsilon}{nKh} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и тогда для первого интеграла в формуле (9) получается, в силу неравенства (9′), оценка при $|x-x_0| \leqslant h$:

$$\left| \int_{x_0}^{x} \{ f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) \} \, dx \right| < \\ < \frac{\varepsilon}{nKh} hnK = \varepsilon.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ предел этого интеграла равен нулю. С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{m \to \infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x)$, и равенства (9) дают в пределе:

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f(x, Y_1, \ldots, Y_n) \, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

дифференцируя обе части по x (производная левой части существует, так как существует производная правой части — производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу), мы получаем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. функции $Y_i(x)$, *действительно, удовлетворяют системе* (4) [1]).

Докажем далее, что *полученное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет единственным.* Допустим, что, кроме системы решений $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$, существует ещё одна система решений $Z_1(x), \ldots, Z_n(x)$, причём $Y_i(x_0) = Z_i(x_0) = y_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и не все Z_i тождественно равны Y_i. Таким образом, в силу нашего допущения (непрерывная) функция

$$\Phi(x) \equiv |Y_1(x) - Z_1(x)| + \\ + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| \qquad (10)$$

не равна тождественно нулю в отрезке $(x_0 - h, x_0 + h)$. Без ограничения общности мы можем допустить, что $\Phi(x) \neq 0$ при значениях x, сколь угодно близких к x_0 и, например, больших, чем x_0 (если бы при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ было $\Phi(x) = 0$, а неравенство выполнялось бы впервые для значений x, бо́льших, чем x_1 и сколь угодно

1) Условия Липшица в этой части доказательства введены лишь для простоты оценки интеграла в формулах (9); стремление этого интеграла к 0 при $m \to \infty$ следует из одной непрерывности функций f_i по аргументам $y_1, \ldots, y_n$ и из равномерного стремления $y_i^{(m-1)}(x)$ к предельным функциям $Y_i(x)$; доказательство, не использующее условий Липшица, проведено нами в главе II для случая одного дифференциального уравнения.

близких к нему, то мы заменили бы в последующих рассуждениях x_0 через x_1) [1]).

Рассмотрим отрезок $[x_0, x_0+h_1]$, где h_1 — любое положительное число, меньшее или равное h. По допущению, $\Phi(x)$ принимает отличные от нуля, следовательно, положительные значения в интервале $[x_0, x_0+h_1]$ для значений x, сколь угодно близких к x_0, значит, при сколь угодно малом h_1. В силу известного свойства непрерывных функций функция (10) достигает своего положительного максимума θ в отрезке $[x_0, x_0+h_1]$ для некоторого значения $x=\xi$, где $x_0<\xi\leqslant x_0+h_1$. Так как наши функции $Y_i(x)$ и $Z_i(x)$, по предположению, удовлетворяют системе (4), то мы имеем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n), \qquad \frac{dZ_i}{dx}=f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n),$$

откуда

$$\frac{d(Y_i-Z_i)}{dx}=f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)-f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n) \tag{11}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Интегрируя тождества (11) в интервале (x_0, x), где x — переменное, принадлежащее отрезку $[x_0, x_0+h]$, получаем:

$$Y_i(x)-Z_i(x)=\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)-f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)\}\,dx$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Оценим разности в левых частях этих равенств, пользуясь условиями Липшица и тем, что значение функции (10) в отрезке $[x_0, x_0+h_1]$ меньше или равно θ. Находим:

$$|Y_i(x)-Z_i(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{x_0}^{x}K\{|Y_1(x)-Z_1(x)|+\ldots+|Y_n(x)-Z_n(x)|\}\,dx<$$
$$<\int_{x_0}^{x}K\theta\,dx=K\theta(x-x_0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Множество E значений x в замкнутом интервале $[x_0-h, x_0+h]$, при которых непрерывная функция $\Phi(x)$ равна нулю, есть замкнутое множество; за точку x_1 можно выбрать любую точку множества E, предельную к дополнительному множеству; такая точка необходимо существует, если E не совпадает со всем интервалом $[x_0-h, x_0+h]$, но в последнем случае имеет место единственность.

Складывая последние неравенства для $i=1, 2, \ldots, n$, находим:

$$|Y_1(x)-Z_1(x)|+\ldots+|Y_n(x)-Z_n(x)|<$$
$$<nK\theta(x-x_0)\leqslant nK\theta h_1 \quad (12)$$

для всякого x, удовлетворяющего неравенствам:

$$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h_1.$$

Если мы возьмём, в частности, значение $x=\xi$, то левая часть (12) будет равна θ, и мы получим неравенство: $\theta<nK\theta h_1$. Оно приводит к противоречию, так как h_1 может быть взято сколь угодно малым, в частности можно взять $h_1\leqslant\frac{1}{nK}$; тогда правая часть окажется $\leqslant\theta$, и мы получаем $\theta<\theta$. Это противоречие доказывает единственность решения.

Полученное нами решение определено только для интервала (x_0-h, x_0+h). Пользуясь языком многомерной геометрии, мы можем сказать, что область D есть параллелепипед $(n+1)$-мерного пространства, прямоугольные координаты точек которого суть $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; решение $y_i=y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ будем называть *интегральной кривой* в этом пространстве, проходящей через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ [1]). Если хоть один из концов полученного отрезка интегральной кривой, соответствующих значениям x_0-h и x_0+h, ещё является внутренним для области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям 1) и 2), например конец, соответствующий $x=x_0+h$, то можно взять точку $x_0^{(1)}=x_0+h$, $y_i^{(1)}=y_i(x_0+h)$, $i=1, 2, \ldots, n$ за новую начальную точку и, исходя из неё, определить дальнейший отрезок интегральной кривой при значениях x в некотором интервале

$$(x_0^{(1)}-h^{(1)}, \quad x_0^{(1)}+h^{(1)}).$$

В силу теоремы единственности эти кривые совпадают в общей части отрезков

$$[x_0-h, x_0+h] \text{ и } [x_0^{(1)}-h^{(1)}, x_0^{(1)}+h^{(1)}].$$

Таким образом, мы продолжили наше решение, определив его на большом интервале; это продолжение возможно до тех пор, пока мы не подойдём как угодно близко к границе той области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям 1) и 2). Таким образом, шаг за шагом, мы определим интегральную кривую.

---

[1]) При $n=2$ мы имеем обычное трёхмерное пространство и обычную пространственную кривую.

Вспомним теперь, что одно дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1'}$$

сводится к системе (4) специального типа (3), (3′):

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Применяя к этой системе доказанную теорему существования и вспоминая связь между функциями y_i и производными от y, существующую в данном случае, мы можем сформулировать следующую теорему существования (и единственности) для уравнения (1′):

Уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной, правая часть которого непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по аргументам $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ $\ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, *имеет единственное решение*, удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$ имеет место $y = y_0, \frac{dy}{dx} = y'_0, \ldots$ $\ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$ (задача Коши)[1]).

3. Теорема Коши утверждает существование частного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, именно решения, удовлетворяющего данным начальным условиям. Геометрически это означает, что существует интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Однако приведённое доказательство позволяет построить также общее решение. Будем рассматривать x_0 как данное число, а $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — как переменные параметры, которые могут принимать различные числовые значения, не выходящие, однако, из области D.

Для каждой такой системы начальных значений получится своя интегральная кривая. Через каждую точку $(n+1)$-мерного пространства, лежащую достаточно близко к «гиперплоскости» $x = x_0$, проходит интегральная кривая нашей системы; в самом деле, рассмотрим какую-нибудь точку $P(\overline{x}_0, \overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)})$ и проходящую

---

1) Если правая часть уравнения n-го порядка является в некоторой области непрерывной функцией всех аргументов, но не удовлетворяет условиям Липшица, то может быть доказано существование решения, но не его единственность; ср. главу II, § 1, 5.

через неё интегральную кривую; если $|x_0 - \bar{x}_0|$ достаточно мало, то эта интегральная кривая может быть продолжена до значения $x = x_0$, причём $y_1, y_2, \ldots, y_n$ примут при $x = x_0$ некоторые значения $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Тогда кривая, определённая начальными значениями $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, пройдёт через точку P. Итак, через каждую точку некоторой области D', лежащей внутри области D, проходит интегральная кривая, определяемая при $x = x_0$ начальными значениями $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$; в силу единственности через каждую точку D' проходит только одна такая интегральная кривая. Формулы (7_1), (7_2), ..., (7_m) показывают, что последовательные приближения $y_i^{(m)}$ являются непрерывными функциями параметров $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$; в силу равномерной сходимости $y_i^{(m)}(x)$ к предельным функциям $y_i(x)$ эти последние тоже являются непрерывными функциями этих параметров:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = \varphi_1(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}),\ y_2 = \varphi_2(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \ldots \\ \ldots, y_n = \varphi_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}); \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

формулы (13) дают выражение о б щ е г о р е ш е н и я системы (4) в области D'; мы видим, что это решение *непрерывно зависит от n произвольных постоянных*, каковыми в нашем выводе являются параметры $y_i^{(0)}$.

Возвращаясь к интересующему нас в этой главе случаю одного дифференциального уравнения n-го порядка, замечаем, что входящей в задачу искомой функцией является y, а функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ являются вспомогательными; поэтому из совокупности формул вида (13) нас интересует только та, которая даёт выражение для y; входящие в неё начальные значения вспомогательных функций суть в нашем случае начальные значения производных от y.

Таким образом, о б щ е е р е ш е н и е у р а в н е н и я (1') имеет вид:

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \tag{14}$$

Замечая, что начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ являются параметрами, т. е. произвольными постоянными, мы приходим к выводу:

Общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных и имеет вид:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{14'}$$

Если соотношение, связывающее x, y и n произвольных постоянных, дано в виде, не разрешённом относительно y:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{15}$$

то мы будем называть такое соотношение *общим интегралом* уравнения (1) или (1').

В теореме существования мы получили в качестве произвольных постоянных начальные значения функции и её $n-1$ последовательных производных; при фактической интеграции уравнения n-го порядка мы обыкновенно получаем другие произвольные постоянные; однако, если их число равно n, то мы при выполнении некоторых условий сумеем из формулы (14′) или (15) получить (в некоторой области) любое частное решение, т. е. решение, удовлетворяющее начальным данным Коши; при выполнении упомянутых условий мы также будем называть формулу (14′) общим решением, а формулу (15) — общим интегралом уравнения (1) или (1′), причём постоянные $C_1, C_2, \ldots C_n$ уже не являются непременно начальными значениями для $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Покажем, как решить задачу Коши, если известно общее решение (14′). Из соотношения (14′) и тех, которые получаются из него дифференцированием по x, подставляя в них вместо x начальное значение x_0, а вместо $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ их начальные значения, мы получаем равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0, \\ &\varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)}; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

рассматривая равенства (16), как n уравнений с n неизвестными, C_1, $C_2, \ldots, C_n$, мы получим, вообще говоря, числовые значения C_1, $C_2, \ldots, C_n$, соответствующие тому частному решению, которое отвечает данным начальным условиям (2). Точно так же, если дан общий интеграл (15), то, подставляя в него вместо y решение (14′) уравнения (1), полученное разрешением уравнения (15) относительно y, мы получим тождество; дифференцируем его по x, помня, что y является функцией x, и подставляем в полученные равенства начальные значения (2); получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0' &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 y_0'^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0'' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16′}$$

[символ $(\ )_0$ указывает, что в данном выражении вместо x и y следует подставить x_0 и y_0]. Мы опять получаем n уравнений для

определения n неизвестных, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е. мы и в этом случае можем, вообще говоря, решить задачу Коши.

Примечание 1. Разрешение системы (16) или (16') относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ заведомо возможно лишь для тех начальных значений, при которых выполняются условия существования неявных функций, т. е. вблизи такой системы $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{y'_0}, \ldots, \overline{y_0^{(n)}}, \overline{C_1}, \overline{C_2} \ldots \overline{C_n}$, которые удовлетворяют системе равенств (16) или (16') и для которых якобиан от левых частей соответствующих уравнений по C_1, $C_2, \ldots, C_n$ не обращается в нуль. Если этот якобиан тождественно равен нулю, то определение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е. решение задачи Коши, невозможно для произвольных начальных значений $y_0, y'_0, \ldots$ $\ldots, y_0^{(n-1)}$ (даже в малой области). Тогда мы скажем, что *n постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в выражении (14') или (15) *не являются существенными*, и эти выражения не представляют общего решения.

Примечание 2. Как и в уравнениях первого порядка, может представиться случай, когда формула вида (14'), содержащая n произвольных постоянных, не даёт всех частных решений, определяемых начальными данными Коши.

Пример 1. Уравнение $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$ при $y \neq 0$, $y \neq e$ приводится к виду (1') с правой частью, непрерывной и имеющей непрерывные производные по y и y'. Следовательно, решение, определяемое начальными данными x_0, y_0, y'_0 при условии $y_0 \neq 0, \neq e$, является обыкновенным. Решение, содержащее две произвольные постоянные a, b, даётся (как легко проверить) формулой $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$. Однако из этого решения нельзя получить частные решения, определяемые начальными условиями $x=x_0$, $y=y_0$ $(\neq 0, \neq e)$, $y'_0=0$. Эти частные решения получаются из формулы $y=C$ (легко видеть, что постоянное значение y удовлетворяет уравнению). В этом случае мы принуждены сказать, что общее решение уравнения даётся двумя формулами: $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$, $y=C$.

Примечание 3. Уравнение вида (1) может быть разрешено относительно $y^{(n)}$, т. е. приведено к виду (1') вблизи любых начальных значений $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$, удовлетворяющих условию:

$$F(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)})=0,$$

если только для этих значений аргументов производная $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$. Все последующие рассуждения имеют силу только в этом предположении. Рассмотрение тех значений, для которых производная $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ обращается в нуль, привело бы к рассмотрению особых решений уравнения n-го порядка; мы на этой теории останавливаться не будем.

Дальнейшей целью настоящей главы будет — установить некоторые случаи, когда уравнение (1) или (1′) может быть проинтегрировано до конца в квадратурах или, по крайней мере, когда задача его интегрирования может быть сведена к интегрированию дифференциального уравнения порядка, меньшего, чем n.

§ 2. Типы уравнений n-го порядка, разрешаемые в квадратурах.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x) \tag{17}$$

легко интегрируется в квадратурах. В самом деле, из уравнения (17) последовательными интеграциями получаем:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C_1, \quad y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C_1(x-x_0)+C_2,$$

$$y^{(n-3)}=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\frac{C_1(x-x_0)^2}{2}+C_2(x-x_0)+C_3, \ \ldots$$

и, наконец,

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \tag{18}$$

Формула (18) даёт общее решение уравнения (17); при этом из промежуточных формул очевидно, что формула (18) представляет решение такой задачи Коши — найти решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным данным: при $x=x_0$

$$y_0=C_n, \quad y_0'=C_{n-1}, \quad \ldots, \quad y_0^{(n-2)}=C_2, \quad y_0^{(n-1)}=C_1.$$

Следовательно, первый член правой части в формуле (18)

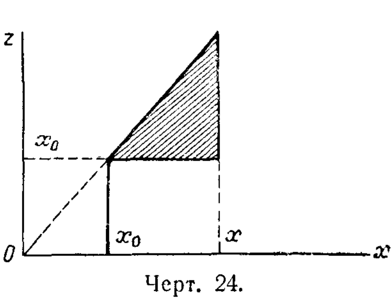
$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{19}$$

представляет частное решение уравнения (17), которое вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка обращается в нуль при $x=x_0$.

Это выражение (19), содержащее n-кратную квадратуру по x, может быть преобразовано к такому виду, где содержится только одна квадратура по параметру.

Начнём со случая $n=2$; обозначая для большей ясности переменные интеграции в двух интегралах различными буквами, имеем:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz.$$



Черт. 24.

Рассматривая правую часть последнего выражения как двойной интеграл в плоскости xOz, мы видим, что он распространён на площадь заштрихованного треугольника (черт. 24); мы можем переменить порядок интеграции, взяв пределы по x от z до x, а по z от x_0 до x (формула Дирихле); имеем:

$$y=\int_{x_0}^{x} dz \int_{z}^{x} f(z)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} dx=\int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz.$$

Рассмотрим далее случай $n=3$:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

По предыдущему, две внутренние интеграции мы можем заменить одной по параметру z, т. е. написать:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz.$$

Интеграция опять распространяется на тот же треугольник плоскости xOz; меняя порядок интеграции и изменяя пределы, находим:

$$y=\int_{x_0}^{x} dz \int_{z}^{x} (x-z) f(z)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} (x-z)\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x} f(z)\cdot\left[\frac{(x-z)^2}{2}\right]_{x=z}^{x=x} dz=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-z)^2 f(z)\,dz.$$

Переходим к любому n; допустим, что для $n-1$ справедлива формула

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n-1 \text{ раз}} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-2} f(z)\,dz.$$

Тогда получаем:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-2} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} (x-z)^{n-2}\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\,dz,$$

т. е. та же формула справедлива для n. Итак, окончательно имеем для всякого натурального n:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\,dz \tag{19'}$$

(формула Коши). Формула (19′) представляет решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=0,\ y'=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=0 \text{ при } x=x_0.$$

Легко, обратно, убедиться дифференцированием в справедливости обоих этих утверждений.

Пример 2. $\frac{d^3y}{dx^3}=\ln x$; начальные значения $x_0=1$, y_0, y_0', y_0'' — любые числа. Имеем:

$$y = y_0 + \frac{(x-1)}{1}y_0' + \frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0'' + Y,$$

где

$$Y = \frac{1}{2}\int_{1}^{x} (x-z)^2 \ln z\,dz.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$Y = \frac{1}{2}\left[-\frac{(x-z)^3}{3}\ln z\right]_{z=1}^{z=x} + \frac{1}{6}\int_1^x \frac{(x-z)^3}{z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^x \left(\frac{x^3}{z} - 3x^2 + 3xz - z^2\right)dz =$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^3 \ln x - 3x^2(x-1) + \frac{3x}{2}(x^2-1) - \frac{x^3-1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18}.$$

Мы получили, таким образом, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ при $x = 1$. Чтобы получить искомое общее решение, связанное с задачей Коши, мы должны прибавить квадратный трёхчлен относительно $x - x_0$; получим:

$$y = y_0 + \frac{x-1}{1}y_0' + \frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0'' +$$
$$+ \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18}.$$

Если мы просто желаем получить общее решение (содержащее три произвольные постоянные), то достаточно заметить, что, в силу произвола выбора значений y_0, y_0', y_0'', коэффициенты при x^2, x и свободный член в последнем выражении являются совершенно произвольными, и мы можем написать искомое общее решение в виде:

$$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0;$$

C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если дано уравнение вида:

$$F(y^{(n)}, x) = 0, \tag{17'}$$

то, разрешив его относительно $y^{(n)}$, мы приведём его к виду (17), и все предыдущие рассуждения сохраняют силу. Но иногда удаётся разрешить это уравнение в элементарных функциях лишь относительно x или, в более общем случае, выразить x и y в функции параметра t; тогда интеграция уравнения (17′) может быть тоже сведена к квадратурам, выраженным явно. Пусть параметрические уравнения, эквивалентные уравнению (17′), суть

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t). \tag{17''}$$

По определению, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$, или, в наших условиях, $dy^{(n-1)} = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

далее,

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}\,dx = \int \varphi'(t)\,dt \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \text{ и т. д.}$$

(Мы не пишем произвольных постоянных, включая их в знак неопределённого интеграла; если написать их явно, то, например, в выражении для $y^{(n-1)}$ появится член C_1, в выражении для $y^{(n-2)}$ — члены C_2 и C_1x или $C_1\varphi(t)$ и т. д.)

В результате получим:

$$x = \varphi(t), \quad y = \Phi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n);$$

если из этих двух соотношений исключить t, получим общий интеграл уравнения (17′).

Примечание. Формула, к которой мы приходим, содержит n-кратную квадратуру; можно, аналогично формуле (19′), и в этом случае получить частное решение, содержащее одну квадратуру и решающее задачу Коши о нахождении решения уравнений (17′) или (17″), обращающегося в нуль вместе с $n-1$ последовательными производными при $x = x_0$. Для этого заметим, что первая из формул (17″) есть не что иное, как формула замены независимого переменного; итак, мы должны в формуле (19′) заменить x через $\varphi(t)$ и входившее в эту формулу z — через ту же функцию $\varphi(u)$ от нового параметра u. Мы имеем, далее, в формуле (17′) $y^{(n)} = f(x) = f[\varphi(t)]$, а это выражение по второй из формул (17″) равно $\psi(t)$. Наконец, пусть начальному значению x_0 соответствует значение t_0 параметра t. Мы получим:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} [\varphi(t) - \varphi(u)]^{n-1}\varphi(u)\,\varphi'(u)\,du. \qquad (19'')$$

Пример 3. $e^{y''} + y'' = x$. Здесь разрешение относительно y'' в элементарных функциях невозможно; за параметр t естественно взять y'', и мы получаем параметрические уравнения: $x = e^t + t$, $y'' = t$. Отсюда

$$dy' = y''\,dx = t(e^t + 1)\,dt = (te^t - t)\,dt,$$

$$y' = \int (te^t + t)\,dt = (t-1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1;$$

далее,

$$dy = y'\,dx = \int \left[(t-1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt,$$

$$y = \int y'\,dx + C_2 =$$

$$= \int \left\{(t-1)\,e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + t - 1 + C_1\right)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right\}dt + C_2,$$

или

$$y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}-1+C_1\right)e^t+\frac{t^2}{6}+C_1t+C_2.$$

Последняя формула вместе с выражением для x, $x=e^t+t$ даёт параметрическое представление общего решения данного уравнения.

2. Уравнение вида

$$F(y^{(n)},\quad y^{(n-1)})=0 \tag{20}$$

приводится к квадратурам при любом натуральном n.

Предположим сначала, что уравнение (20) разрешено относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)}); \tag{20'}$$

вводим новую функцию z: $z=y^{(n-1)}$; уравнение (20′) примет вид:

$$z'=f(z).$$

Из этого уравнения получаем с помощью разделения переменных его общий интеграл:

$$x+C_1=\int\frac{dz}{f(z)}.$$

Допустим, что это соотношение разрешено относительно z:

$$z=\varphi(x,\ C_1).$$

Заменяя z его значением $y^{(n-1)}$, получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n-1)}=\varphi(x,\ C_1),$$

которое рассмотрено в п. 1 настоящего параграфа; при его интеграции войдут ещё $n-1$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (20) в виде:

$$y=\underbrace{\int dx\int dx\ldots\int}_{n-1\text{ раз}}\varphi(x,\ C_1)\,dx+C_2x^{n-2}+$$
$$+C_3x^{n-3}+\ldots+C_{n-1}\,x+C_n.$$

Если уравнение (20) неразрешимо в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, но мы имеем выражения $y^{(n)}$ и $y^{(n-1)}$ через параметр t:

$$y^{(n)}=\varphi(t),\quad y^{(n-1)}=\psi(t), \tag{20''}$$

то соотношение $dy^{(n-1)}=y^{(n)}\,dx$, или $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}$, даёт нам $dx=\dfrac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}$, откуда x получается квадратурой:

$$x=\int\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}+C_1.$$

Далее, находим последовательно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx,\ \ldots,\ dy = y'\,dx$$

и, наконец,

$$y = \int y'\,dx + C_n,$$

т. е. опять представление y и x в функции параметра t и n произвольных постоянных C_1, $C_2, \ldots, C_n$, следовательно, общее решение.

Пример 4. $ay'' = -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. Согласно изложенной теории, полагая $y' = z$, получаем уравнение первого порядка:

$$a\frac{dz}{dx} = -\left(\sqrt{1+z^2}\right)^3, \text{ или } dx = -\frac{a\,dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$x - C_1 = -a\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Дальше удобно интегрировать в параметрическом виде:

$$z = y' = \operatorname{tg}\varphi, \quad x - C_1 = -a\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -a\sin\varphi.$$

Отсюда находим:

$$dy = y'\,dx = \operatorname{tg}\varphi\,(-a\cos\varphi\,d\varphi) = -a\sin\varphi\,d\varphi, \quad y = a\cos\varphi = C_2.$$

Исключая параметр φ, получаем общий интеграл:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2,$$

представляющий уравнение семейства всех окружностей радиуса a на плоскости.

3. Уравнения вида

$$F(y^{(n)},\ y^{(n-2)}) = 0 \tag{21}$$

также интегрируются в квадратурах. Введение нового переменного $z = y^{(n-2)}$ приводит уравнение (21) к уравнению второго порядка:

$$F(z'',\ z) = 0. \tag{22}$$

Если уравнение (22) разрешено относительно z'', т. е. имеет вид:

$$z'' = f(z), \tag{22'}$$

то один из методов его интеграции таков: умножив обе части на $2z'$, получаем: $2z'z''=2f(z)z'$, или в дифференциалах:

$$d(z'^2)=2f(z)\,dz,$$

откуда

$$z'^2=2\int f(z)\,dz+C_1.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно производной и разделить переменные:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz+C_1}}=dx;$$

отсюда находим общий интеграл уравнения (22'):

$$\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz+C_1}}=x+C_2.$$

Этот интеграл по замене z на $y^{(n-2)}$ получает вид:

$$\Phi(y^{(n-2)},\ x,\ C_1,\ C_2)=0,$$

т. е. уравнение вида (17'); оно интегрируется, как мы уже знаем, квадратурами, причём эта интеграция даёт ещё $n-2$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (21).

Если уравнение (21) дано в не разрешённом относительно $y^{(n)}$ виде, но известно его параметрическое представление

$$y^{(n)}=\varphi(t),\quad y^{(n-2)}=\psi(t), \tag{21'}$$

то интеграция совершается следующим образом. Мы имеем два равенства:

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}\,dx,\quad dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}\,dx,$$

связывающих две неизвестные функции от t, именно x и y; исключая делением dx, получаем дифференциальное уравнение для $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)}=y^{(n)}\,dy^{(n-2)}$$

или, в силу уравнений (21'),

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)}=\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

откуда квадратурой находим $(y^{(n-1)})^2$; далее получим:

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt+C}.$$

Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к типу (20''), рассмотренному в п. 2 настоящего параграфа. Дальнейшие квадратуры введут $n-1$ новых произвольных постоянных.

Пример 5. $a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}$. Полагая $y''=z$, приходим к уравнению: $a^2z''=z$; умножим обе части на $2z'$:

$$2a^2z'z''=2zz', \text{ или } 2a^2z'dz'=2z\,dz.$$

Интегрируя, находим:

$$a^2z'^2=z^2+C_1,$$

откуда

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{dx}{a}.$$

Вторая интеграция даёт:

$$\ln(z+\sqrt{z^2+C_1})=\frac{x}{a}+\ln C_2, \text{ или } z+\sqrt{z^2+C_1}=C_2e^{\frac{x}{a}}.$$

Чтобы разрешить последнее уравнение относительно z, выгодно поступить следующим образом: делим 1 на обе части последнего равенства:

$$\frac{1}{z+\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}};$$

в левой части освобождаемся от иррациональности в знаменателе, затем умножаем обе части на $-C_1$; получаем:

$$z-\sqrt{z^2+C_1}=-\frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Складывая это уравнение с исходным и деля на 2, получаем:

$$z=\frac{C_2}{2}e^{\frac{x}{a}}-\frac{C_1}{2C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Подставляя вместо z его значение y'' и интегрируя два раза, находим:

$$y=Ae^{\frac{x}{a}}+Be^{-\frac{x}{a}}+Cx+D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Задачи.

Проинтегрировать уравнения:

106. $y'''^2+x^2=1$.

Указание. Удобно ввести параметрическое представление.

107. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$.

108. $a^3y'''y''=(1+C^2y''^2)^{\frac{1}{2}}$.

109. $y'''=\sqrt{1+y''^2}$.

4. Приложение к динамике точки. Уравнения второго порядка, принадлежащие к рассмотренному типу, встречаются в задачах динамики; они соответствуют движениям материальной точки, проис-

ходящим в одном измерении **под действием силы, зависящей только от положения точки**. Обозначая переменную координату точки буквой x, а время буквой t, предполагая величину силы заданной функцией $f(x)$ и считая для простоты массу точки равной единице, мы имеем уравнение движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x), \tag{A}$$

которое принадлежит к типу (22′). Мы предполагаем функцию $f(x)$ непрерывной. Умножая обе части на $\frac{dx}{dt}\,dt=dx$ и интегрируя, мы получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C \tag{B}$$

— соотношение, называемое в механике *интегралом живых сил*. Если начальному моменту $t=0$ соответствуют начальное положение x_0 и начальная скорость v_0, то постоянная интеграции $C=\frac{1}{2}v_0^2$.

Для дальнейшей интеграции напишем уравнение (B) при данном значении постоянной C в форме:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=F(x) \tag{B′}$$

и исследуем характер функций, удовлетворяющих уравнению (B′). Рассмотрим сначала решение $x=x_0$ уравнения (A), соответствующее состоянию покоя; в этом случае $\frac{dx}{dt}\equiv 0$; следовательно, в формуле (B) имеем $C=0$; далее, так как $\frac{d^2x}{dt^2}\equiv 0$, имеем $f(x_0)=0$. Это заключение можно было предвидеть a priori, так как положение равновесия может осуществляться лишь в тех точках, где действующая сила равна нулю. Мы отметим другое следствие; *решению $x=x_0$ соответствует корень кратности $\geqslant 2$ уравнения*

$$F(x)=0, \tag{C}$$

так как $F(x_0)=2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx=0$, $F'(x_0)=f(x_0)=0$; очевидно, что и обратно, если x_1 есть кратный корень уравнения (C), то $x=x_1$ есть решение уравнения (A).

Действительные движения, не сводящиеся к покою, могут существовать лишь при положительных значениях постоянной C; данному начальному значению x_0 при данном $C>0$ соответствуют два движения, так как уравнение (B′) определяет двузначную функцию $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=+\sqrt{F(x)},\quad \frac{dx}{dt}=-\sqrt{F(x)}. \tag{B″}$$

Эти два движения соответствуют положительному или отрицательному направлению начальной скорости. Рассмотрим, например, первое движение. Если

$F(x)$ не обращается в нуль при $x_0 < x < \infty$, то решение первого уравнения (B″) получится из формулы:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = t, \tag{D}$$

причём интеграл в левой части существует для сколь угодно больших значений x; следовательно, x как функция t неограниченно возрастает.

Пусть теперь для некоторого значения $x_1 > x_0$ мы имеем:

$$F(x_1) = 0.$$

Здесь возможны два случая:

а) x_1 есть простой корень уравнения (C), т. е. $F(x_1) = 0$, $F'(x_1) < 0$ (знак $<$ имеет место потому, что при возрастании x функция F переходит к нулю от положительных значений). Функция F имеет вид:

$$F(x) = (x_1 - x)\varphi(x), \quad \varphi(x_1) > 0.$$

Интеграл в формуле (D) в пределах от x_0 до x_1 сходится:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x_1 - x)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi(x)}} = t_1.$$

Итак, по истечении промежутка времени t_1 точка дойдёт до положения x_1; $x = x_1$ есть решение уравнения (B′) (особое — глава III, § 4, **1**); но этому решению не соответствует никакого движения, т. е. *решения уравнения* (A), *так как движению* $x = \text{const.}$, по доказанному, соответствует кратный корень уравнения (C). В момент t_1 скорость движения равна нулю:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_1} = \sqrt{F(x)} = 0.$$

Вычислим ускорение:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_1} = f(x_1) = \frac{1}{2} F'(x_1) = -\frac{1}{2}\varphi(x_1) < 0.$$

Отрицательное ускорение сообщит точке при $t > t_1$ отрицательную скорость, т. е. для значений $t > t_2$ движение будет управляться вторым уравнением (B″): $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{F(x)}$. Координата x движущейся точки станет убывать при $t > t_1$.

б) x_1 есть кратный корень уравнения (C): $F(x_1) = F'(x_1) = 0$. Функция F имеет вид:

$$F(x) = (x_1 - x)^2 \psi(x); \quad \psi(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_1, \quad \psi(x_1) \geqslant 0.$$

Интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x_1 - x)\sqrt{\psi(x)}}$$

расходится. Следовательно, из формулы (D) имеем: когда x, возрастая, стремится к x_1, t возрастает неограниченно. Отсюда следует, что при $t \to +\infty$ точка стремится асимптотически к положению $x = x_1$, которое [в силу ранее сделанного замечания, см. стр. 163] есть положение равновесия. Уравнение $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{F(x)}$ может быть получено из предыдущего заменой t на $-t$; следовательно, движение, соответствующее начальному положению x_0, асимптотически приближается к положению покоя x_1, когда $t \to -\infty$. Рассматривая ту же траекторию при t возрастающем, начиная с того момента, когда движущаяся точка находится в сколь угодно малой окрестности положения x_1, мы видим, что в некоторый момент она займёт положение x_0, т. е. удалится от x_1 на расстояние, превышающее некоторую положительную величину — положение равновесия является неустойчивым (при данном постоянном C).

Пусть теперь x_0 лежит между двумя корнями уравнения (С):

$$x_2 < x_0 < x_1, \quad F(x_1) = F(x_2) = 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_2 < x < x_1.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда оба корня простые:

$$F'(x_2) > 0, \quad F'(x_1) < 0.$$

Мы уже видели, что движущаяся точка, движение которой определено начальными данными x_0, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = +\sqrt{F(x_0)}$, по истечении времени t_1 займёт положение x_1, после чего x начнёт убывать. Это убывание будет иметь место в течение промежутка времени

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{-\sqrt{F(x)}} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

по истечении которого точка займёт положение x_2; рассуждение, подобное вышеприведённому, показывает, что в момент $t_1 + T$ произойдёт опять изменение знака скорости; x будет возрастать, пока не достигнет значения x_1, т. е. в течение времени

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = T;$$

при этом точка займёт начальное положение x_0 в момент

$$t_1 + T + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = t_1 + 2T - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = t_1 + 2T - t_1 = 2T.$$

В этот момент скорость опять будет $+\sqrt{F(x_0)}$. Рассматривая момент $2T$ как начальный, мы, ввиду независимости правой части уравнения (B′) от t, получим повторение того же самого движения. Итак, в рассматриваемом случае *решение уравнения* (A) *есть периодическая функция времени* t *с периодом*

$$2T = 2\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Это предложение есть частный (одномерный) случай общей теоремы Вейерштрасса об «условно-периодических» движениях.

Другие случаи наличия двух корней уравнения (C) легко разрешаются на основании предыдущего. Если $x_2 < x_0 < x_1$ и оба корня x_1 и x_2 кратные, то движения асимптотически стремятся к x_1 при $t \to +\infty$ и к x_2 при $t \to -\infty$, если $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 > 0$, и $\lim\limits_{t \to +\infty} x = x_2$, $\lim\limits_{t \to -\infty} x = x_1$ при $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 < 0$.

Если x_1 — кратный корень, а x_2 — простой, то всякое движение при $t \to \pm\infty$ имеет пределом x_1, а в промежутке координата x один раз принимает минимальное значение x_2.

Отметим, наконец, что если $2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (x - x_0)^2 \psi(x)$, где $\psi(x) < 0$, то при значении $C = 0$ возможным движением является только покой: $x = x_0$. При малых положительных значениях C правая часть уравнения (B)

$$2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C = (x - x_0)^2 \psi(x) + C$$

будет положительной лишь при малых значениях $|x - x_0|$; следовательно, при малом изменении C возле нуля точка при своём движении может лишь мало уклоняться от положения $x = x_0$, которое оказывается, таким образом, *устойчивым положением равновесия*. Называя функцию $-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx - C = -\frac{1}{2}F(x)$ потенциальной энергией, мы приходим к заключению: ***максимуму потенциальной энергии соответствует неустойчивое положение равновесия, минимуму — устойчивое.***

Пример 6. Уравнение *математического маятника*: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$. Положения равновесия даются из условия: $\sin\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; потенциальная энергия $V = -\frac{g}{l}\cos\varphi - C$ имеет минимум при $\varphi = 0$ — это устойчивое положение равновесия, и максимум при $\varphi = \pi$ — неустойчивое равновесие. Пишем интеграл живых сил:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - 1) + C,$$

принимая для простоты за начальное положение $\varphi_0 = 0$. Если $C > \frac{2g}{l}$, то правая часть всегда положительна и угол φ монотонно возрастает или убывает во время всего движения. Если $C = \frac{2g}{l}$, то правая часть равна $\frac{g}{l}(1 + \cos\varphi) = \frac{2g}{l}\cos^2\frac{\varphi}{2}$; она имеет двойные корни $\varphi = \pm\pi$, соответствующие положению равновесия; движения асимптотически стремятся к (неустойчивому) равновесию при $t \to \pm\infty$. Пусть, далее, $0 < C < 2\frac{g}{l}$; мы можем положить $C = \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi_1)$, $0 < \varphi_1 < \pi$. Интеграл живых сил примет вид

$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$. Правая часть имеет простые нули при $\varphi = \pm\varphi_1$; маятник будет совершать колебательные периодические движения амплитуды φ_1, $-\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$. Период одного качания есть

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_1}}.$$

Наконец, значению $C = 0$ соответствует устойчивое положение равновесия $\varphi = 0$. При $C < 0$ движения невозможны.

§ 3. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Промежуточный интеграл. Если мы имеем уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

то, как уже сказано, соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{15}$$

определяющее решение этого уравнения и связывающее y, x и n существенных произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (1). Иначе, общий интеграл можно определить так: соотношение (15) называется общим интегралом уравнения (1), если, исключая из него и из уравнений, получаемых дифференцированием его по x (причём y рассматривается как функция от x), произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, мы приходим к уравнению (1) (глава I, § 1).

Пусть теперь мы имеем соотношение:

$$\psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n) = 0, \tag{23}$$

в которое входят производные до k-го порядка (производная $y^{(k)}$ входит непременно) и $n-k$ произвольных постоянных.

Дифференцируем это уравнение $n-k$ раз по x, считая y функцией x; имеем:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-k}\psi}{\partial x^{n-k}} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \tag{23'}$$

Если в результате исключения из $n-k+1$ уравнений (23) и (23′) $n-k$ постоянных C_i $(i = k+1, \ldots, n)$ мы получим уравнение (1), то соотношение (23) называется *промежуточным интегралом*

уравнения (1). В частности, если соотношение (23) содержит только одно произвольное постоянное, т. е. имеет вид:

$$\psi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ C)=0,$$

то оно называется *первым интегралом* уравнения (1).

Промежуточный интеграл (23), если в нём рассматривать y как искомую функцию, сам является дифференциальным уравнением порядка k, где $k<n$. Легко видеть, что каждое решение уравнения (23) является решением уравнения (1); в самом деле, если $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (23), то, подставляя это значение y в уравнения (23) и (23′), мы обратим их в тождества; а значит, и уравнение (1), которое является следствием системы (23) и (23′), обратится в тождество, что и требовалось доказать. Если мы найдём общее решение уравнения (23), то оно должно содержать k новых произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$ сверх входящих в самое уравнение параметров $C_{k+1},\ \ldots,\ C_n$, и мы получим решение уравнения (1), содержащее n произвольных постоянных, т. е. общее решение этого последнего уравнения. Таким образом, *знание промежуточного интеграла* вида (23) *позволяет свести задачу интеграции уравнения n-го порядка к интеграции уравнения порядка $k<n$*, т. е. к задаче, теоретически говоря, более простой.

В предыдущем параграфе мы уже встречались с промежуточными интегралами; так, в пункте 1, при решении уравнения (17), мы писали последовательно промежуточные интегралы с одним, двумя, ..., $n-1$ произвольными постоянными, пока не получили, наконец, общий интеграл (18); в пункте 2 для уравнения (20′) мы снова находили промежуточный интеграл $z=\varphi(x,\ C_1)$, где $z=y^{(n-1)}$, с одним произвольным постоянным (первый интеграл); для уравнения (21) мы имеем первый интеграл $(y^{(n-1)})^2=2\int f(z)\,dz+C_1$ и, далее, промежуточный интеграл с двумя произвольными постоянными. И в настоящем параграфе, в дальнейших разделах, интеграция дифференциального уравнения n-го порядка будет распадаться на два шага: 1) нахождение промежуточного интеграла и 2) интеграция уравнения, представляемого этим промежуточным интегралом.

Примечание. Если мы знаем два различных первых интеграла уравнения (1):

$$\psi_1(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ C_1)=0,\quad \psi_2(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ C_2)=0,$$

то исключение из этих соотношений производной $y^{(n-1)}$ приведёт к промежуточному интегралу, содержащему две произвольные постоянные. Аналогичный результат получим для трёх, четырёх, ..., $n-1$ первых интегралов. Наконец, если мы знаем n различных первых интегралов уравнения (1), то, исключая из них $y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, мы придём к соотношению, связывающему $x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, т. е. к общему интегралу данного уравнения. Таким образом, если известны n (различных) первых интегралов, то общее решение уравнения получается без интеграции, при помощи исключения.

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции или независимого переменного. Пусть уравнение n-го порядка не содержит явно искомой функции y; для общности предположим, что оно не содержит также её $k-1$ первых производных $y', \ldots, y^{(k-1)}$, и низшая производная, явно входящая в уравнение, есть $y^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Уравнение имеет вид:

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (24)$$

Полагая $y^{(k)} = z$, мы заменяем уравнение (24) уравнением

$$F(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-k)}) = 0 \qquad (24')$$

порядка $n-k$. В противоположность случаям, рассмотренным в § 2, здесь мы не можем утверждать, что уравнение (24′) всегда интегрируется в квадратурах. Но вместо уравнения n-го порядка мы получили уравнение порядка $n-k<n$. Допустим, что мы сумели найти общий интеграл уравнения (24′):

$$\Phi(x,\ z,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}) = 0,$$

или

$$\Phi(x,\ y^{(k)},\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}) = 0. \qquad (25)$$

Уравнение (25) есть промежуточный интеграл уравнения (24), содержащий $n-k$ постоянных. Само уравнение (25) принадлежит к типу (17′) § 2, т. е. заведомо интегрируется в квадратурах, и, решая его, мы найдём общий интеграл уравнения (24). Если $k=n$, мы непосредственно имеем уже рассмотренное нами уравнение (17′).

Пусть, далее, уравнение (1) не содержит явно x, т. е. имеет вид:

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (26)$$

Здесь мы проведём такую замену переменных: в качестве новой искомой функции вводим $p = \frac{dy}{dx}$; за независимое переменное принимаем y. Вычисляем в этом предположении производные различных порядков:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\,\frac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left[p\,\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Таким образом, вторая производная от y по x выражается через p и $\frac{dp}{dy}$, третья производная выражается через p и его производные не выше второго порядка. Легко доказать методом полной индукции, что $\frac{d^ky}{dx^k}$ выражается через p, $\frac{dp}{dy}$, ..., $\frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$. Подставляя выражения

для y'', y''', ..., $y^{(n)}$ в новых переменных в уравнение (26), получим новое дифференциальное уравнение порядка $n-1$:

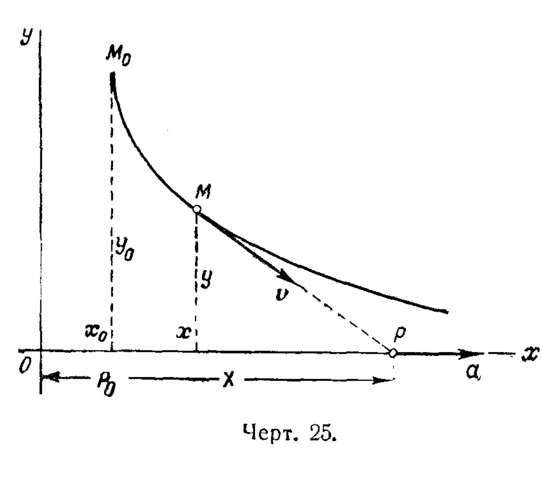
$$F_1\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Если его удастся проинтегрировать, то его общий интеграл

$$\Phi(y,\ p,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1})=0, \quad \text{или} \quad \Phi\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1}\right)=0,$$

который является промежуточным для уравнения (26), даёт дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируемое в квадратурах.

Пример 7. *Линия погони.* Рассмотрим такую кинематическую задачу. На оси Ox в положительном направлении движется с постоянной скоростью a точка P; на плоскости xOy движется точка M с постоянной скоростью v так, что вектор скорости всегда направлен в точку P; найти траекторию точки M (черт. 25).



Черт. 25.

Обозначим декартовы прямоугольные координаты точки M через (x, y) и абсциссу точки P через X. Из условия задачи имеем:

$$X=X_0+at, \quad \text{(A)}$$

$$dx^2+dy^2=v^2\,dt^2, \quad \text{(B)}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{X-x}. \quad \text{(C)}$$

Из уравнения (A) имеем: $X-x=X_0-x+at$; затем из (C):

$$X_0-x+at=-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}. \quad \text{(D)}$$

Принимаем x за независимое переменное (обозначаем производные от y по x штрихами) и исключаем t; из уравнения (B) имеем:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2};$$

из уравнения (D), дифференцируя по x, находим:

$$-1+a\frac{dt}{dx}=\frac{yy''-y'^2}{y'^2}, \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{yy''}{ay'^2}.$$

Приравнивая оба найденных выражения для $\frac{dt}{dx}$, получаем дифференциальное уравнение линии погони:

$$y''=\frac{a}{v}\,\frac{y'^2}{y}\sqrt{1+y'^2}.$$

Уравнение не содержит независимого переменного; согласно изложенному нами общему методу вводим новое переменное: $y'=p$, откуда $y''=p\frac{dp}{dy}$; получаем:

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{a}{v}\frac{p^2}{y}\sqrt{1+p^2},\quad \text{или}\quad \frac{dp}{dy}=\frac{a}{v}\frac{p}{y}\sqrt{1+p^2}\,^{1)}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{v}\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, находим (замечая, что p отрицательно):

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}}=-\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}},$$

$$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right)=\frac{a}{v}(\ln y+\ln C),$$

откуда

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=(Cy)^{\frac{a}{v}}.$$

Чтобы ввести произвольные постоянные наиболее простым образом, предположим, что в момент, когда точки P и M находились на одной параллели к оси y, ордината точки M была равна y_0 (т. е. что погоня начинается с положения M_0P_0): в этот момент, очевидно, $\frac{1}{p}=0$, и мы находим $C=\frac{1}{y_0}$; промежуточный интеграл пишется так:

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}.$$

Освобождаясь от радикала, как в примере 5, находим:

$$-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}},$$

откуда

$$\frac{2}{p}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}},\quad \text{или}\quad dx=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}\right\}dy.$$

Предполагая $a\neq v$ (мы будем считать, что $a<v$, т. е. что точка M может догнать точку P), получаем искомое уравнение линии погони при помощи второй квадратуры:

$$x=\frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-\frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}+C_1,$$

---

1) Решение $p=0$ в силу уравнения (C) даёт $y=0$, т. е. движение по прямой — оси Ox.

где постоянное C_1 легко определится через начальную абсциссу x_0 при $y=y_0$. Окончательно имеем:

$$x=\frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1\right]-\frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1\right]+x_0.$$

Абсциссу точки встречи получаем, полагая $y=0$; её значение

$$x_1=x_0+\frac{ay_0}{v\left(1-\frac{a^2}{v^2}\right)}=x_0+y_0\frac{av}{v^2-a^2}.$$

Наконец, продолжительность погони

$$T=\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_0v}{v^2-a^2}.$$

ЗАДАЧИ.

110. Проинтегрировать до конца уравнение линии погони в случае $v=a$.
Проинтегрировать уравнения:

111. $2(2a-y)y''=1+y'^2$.

112. $y''-xy'''+y'''^3=0$.

113. $yy''+y'^2=y^2\ln y$.

3. Понижение порядка в однородных уравнениях различных типов.

А) Пусть левая часть уравнения (1) есть однородная функция аргументов $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, т. е. пусть выполняется тождественно

$$F(x,\ ky,\ ky',\ \ldots,\ ky^{(n)})=k^mF(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) \qquad (27)$$

для любого k; m есть показатель однородности.

Заметим, что если $y_1(x)$ есть решение такого уравнения, то $Cy_1(x)$ есть также решение (C — произвольная постоянная). В самом деле, результат подстановки в левую часть уравнения (1) на место y выражения $Cy_1(x)$ даёт произведение из C^m на результат подстановки в то же уравнение функции $y_1(x)$, что, по условию, тождественно равно нулю. Если мы введём новую искомую функцию

$$u=\ln y,$$

то, по предыдущему, если $u_1(x)$ будет решением преобразованного уравнения, то $u_1+\ln C=u_1(x)+C_1$ будет также его решением. Иначе говоря, уравнение допускает группу преобразований $x_1=x$, $u_1=u+C$. Рассуждения, аналогичные проведённым в главе I (§ 3, **3**), показывают, что в таком случае искомая функция u не входит явно в преобразованное уравнение. А тогда, как мы знаем, замена зависимого переменного

$$u'=z$$

приводит к уравнению порядка $n-1$. Исключая промежуточное переменное u, получаем такую зависимость между y и z:

$$y = e^{\int z\,dx}. \tag{28}$$

Итак, *порядок рассматриваемого уравнения может быть понижен на единицу введением новой неизвестной функции* z, *связанной с* y *соотношением* (28).

Проверим это рассуждение непосредственным вычислением. Последовательно дифференцируя равенство (28) по x, находим:

$$y' = ze^{\int z\,dx},\quad y'' = (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx},\quad y''' = (z'' + 3zz' + z^3)\,e^{\int z\,dx},\ \ldots,$$

и, вообще, $y^{(k)}$ выразится как произведение $e^{\int z\,dx}$ на выражение, содержащее z и его производные до порядка $k-1$ [1]). Вносим эти выражения в уравнение и замечаем, что, в силу соотношения (27), имеем:

$$F\left(x,\ e^{\int z\,dx},\ ze^{\int z\,dx},\ (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx},\ \ldots\right) \equiv$$
$$\equiv e^{m\int z\,dx} F(x,\ 1,\ z,\ z' + z^2,\ \ldots)$$

(m — показатель однородности). Множитель $e^{m\int z\,dx}$ в уравнении может быть отброшен, и мы получаем уравнение порядка $n-1$:

$$F(x,\ 1,\ z,\ z' + z^2,\ \ldots) = 0.$$

Если его удастся решить, мы получим промежуточный интеграл уравнения (1), зависящий от $n-1$ постоянных, вида

$$\Phi(z,\ x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}) = 0,\ \text{ или }\ \Phi\left(\frac{y'}{y},\ x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}\right) = 0.$$

Когда выражение функции z известно, то y получится квадратурой по формуле (28), причём войдёт новое постоянное C_n:

$$y = e^{\int z\,dx + \ln C_n} = C_n e^{\int z\,dx}.$$

Пример 8. $x^2yy'' = (y - xy')^2$. Уравнение — однородное второй степени относительно y, y', y''. Подстановка $y = e^{\int z\,dx}$ даёт уравнение $x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$, или $x^2z' + 2xz - 1 = 0$ — уравнение линейное. Решаем его:

$$z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y = e^{\int\left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx},\quad \text{или}\quad y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

---

1) Этот факт легко доказывается полной индукцией.

ЗАДАЧИ.

Решить уравнения:

114. $yy'' - y'^2 = 0$.

115. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

В) Другим типом однородных дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, являются уравнения, однородные относительно x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny. Для установления этой однородности пишем уравнение (1) в форме:

$$\Phi(x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2y,\ \ldots,\ d^ny) = 0. \tag{29}$$

Уравнение принадлежит к рассматриваемому нами типу, если функция Φ в формуле (29) однородна (степени m) в отношении всех своих аргументов, т. е. если имеет место тождество:

$$\Phi(kx,\ ky,\ k\,dx,\ k\,dy,\ k\,d^2y,\ \ldots,\ k\,d^ny) \equiv \equiv k^m\Phi(x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2y,\ \ldots,\ d^ny).$$

Вид уравнения показывает, что оно не изменяется, если заменить x через Cx и y через Cy (C — постоянное). Если мы введём переменные $u = \frac{y}{x}$ и x, то преобразованное уравнение будет допускать группу преобразований $u_1 = u$, $x_1 = Cx$. Наконец, если ввести новое независимое переменное $\xi = \ln x$, то уравнение, связывающее u и ξ, будет допускать группу преобразований:

$$u_1 = u, \quad \xi_1 = \xi + C;$$

отсюда следует, что в последнее уравнение не входит явно ξ (см. главу I, § 3, **3**); поэтому, как показано в п. 2 настоящего параграфа, оно допускает понижение порядка на единицу. Выписываем формулы непосредственного перехода от переменных x, y к переменным ξ, u:

$$x = e^{\xi}, \quad y = ue^{\xi}. \tag{30}$$

Проверим непосредственным вычислением результат этой замены.

Последовательным дифференцированием находим:

$$dx = e^{\xi}\,d\xi, \quad dy = e^{\xi}(du + u\,d\xi);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} + u.$$

Далее,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + u\right)\frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi}\left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{d\xi}\left[e^{-\xi}\left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi}\right)\right]\frac{d\xi}{dx} = e^{-2\xi}\left(\frac{d^3u}{d\xi^3} - \frac{du}{d\xi}\right)$$

и т. д. Итак, мы получаем:

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{\xi}, \quad y = ue^{\xi}, \quad dx = e^{\xi}\,d\xi, \quad dy = e^{\xi}(du + u\,d\xi), \\ d^2y = e^{\xi}(d^2u + du\,d\xi), \quad d^3y = e^{\xi}(d^3u - du\,d\xi^2), \ \ldots \end{array}\right\} \tag{30'}$$

(при этом d^2y, d^3y, ... взяты в предположении, что независимое переменное есть x, а d^2u, d^3u, ... — в предположении, что независимое переменное есть ξ). Внося выражения (30′) в уравнение (29), мы, в силу однородности, можем вынести за знак функции Φ множитель $e^{m\xi}$ и сократить на него уравнение; получим:

$$\Phi(1,\ u,\ d\xi,\ du+u\,d\xi,\ d^2u+du\,d\xi,\ \ldots,\ d^nu+\ldots)=0.$$

Мы получили уравнение n-го порядка, в которое явно не входит независимое переменное ξ; это уравнение принадлежит к типу, рассмотренному в п. 2 настоящего параграфа, и допускает понижение порядка на единицу.

Пример 9. Уравнение

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}-x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3x^2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(3xy^2+2x^3)\frac{dy}{dx}+2x^2y+y^3=0$$

— однородное третьей степени относительно x, y, dx, dy, d^2y; делаем подстановку $x=e^{\xi}$, $y=ue^{\xi}$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{d\xi}+u,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-\xi}\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{dy}{d\xi}\right).$$

Подставляем в уравнение и сокращаем на $e^{3\xi}$:

$$u''+u'-(u'+u)^3+3u(u'+u)^2-(3u^2+2)(u'+u)+2u+u^3=0,$$

или, раскрывая скобки и производя приведение,

$$u''-u'-u'^3=0.$$

Новое уравнение не содержит явно ни ξ, ни u; полагая $u'=p$ и вводя u в качестве независимого переменного, имеем:

$$p\frac{dp}{du}-p-p^3=0.$$

Оставляя пока в стороне уравнение $p=0$, имеем: $du=\frac{dp}{1+p^2}$, $p=\operatorname{tg}(u+C_1)$, т. е. $\frac{du}{d\xi}=\operatorname{tg}(u+C_1)$, откуда $\frac{du}{\operatorname{tg}(u+C_1)}=d\xi$, $\ln\sin(u+C_1)=\xi+\ln C_2$, $\sin(u+C_1)=C_2e^{\xi}$, или, возвращаясь к начальным переменным, $\sin\left(\frac{y}{x}+C_1\right)=C_2x$, или $y=-C_1x+$ $+x\arcsin(C_2x)$. Решение $p=0$ даёт $u=C$ или $y=Cx$; это решение получается из общего, если в нём положить $C_2=0$.

C) Можно рассмотреть несколько более общий класс однородных уравнений, именно уравнения вида (29), в которых функция Φ однородна относительно своих аргументов, если считать x и dx первого измерения, а y, dy, d^2y, ... — измерения m; тогда $\frac{dy}{dx}$ будет

иметь измерение $m-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — измерение $m-2$ и т. д. Для понижения порядка применяем подстановку:

$$x=e^{\xi}, \quad y=ue^{m\xi};$$

мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=e^{m\xi}\left(\frac{du}{d\xi}+mu\right)\frac{d\xi}{dx}=e^{(m-1)\xi}\left(\frac{du}{d\xi}+mu\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\xi}\left[e^{(m-1)\xi}\left(\frac{du}{d\xi}+mu\right)\right]\frac{d\xi}{dx}=$$

$$=e^{(m-2)\xi}\left[\frac{d^2u}{d\xi^2}+(2m-1)\frac{du}{d\xi}+m(m-1)u\right], \ \ldots$$

Каждая производная содержит множитель e^{ξ} в такой степени, каково измерение этой производной в функции F; поэтому e^{ξ} в некоторой степени выйдет за знак функции Φ. Мы получим дифференциальное уравнение между u и ξ, не содержащее явно ξ, т. е. допускающее понижение порядка на единицу.

Пример 10.

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}-(x^3+2xy)\frac{dy}{dx}+4y^2=0.$$

Если x и dx рассматривать как величины первого измерения и y, dy, d^2y — как второго измерения, то данное уравнение является однородным четвёртого измерения. Согласно нашей теории, делаем замену переменных: $x=e^{\xi}$, $y=ue^{2\xi}$. Находим:

$$\frac{dy}{dx}=e^{\xi}\left(\frac{du}{d\xi}+2u\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{d\xi^2}+3\frac{du}{d\xi}+2u.$$

При подстановке в уравнение множитель $e^{4\xi}$ сокращается, и мы получаем:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+3\frac{du}{d\xi}+2u-(1+2u)\left(\frac{du}{d\xi}+2u\right)+4u^2=0,$$

или

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+2(1-u)\frac{du}{d\xi}=0.$$

Согласно сказанному в п. 2 настоящего параграфа, полагаем $\frac{du}{d\xi}=p$, откуда $\frac{d^2u}{d\xi^2}=p\frac{dp}{du}$. Получаем:

$$p\frac{dp}{du}+2(1-u)p=0.$$

Оставляя пока в стороне уравнение $p=0$, рассмотрим уравнение:

$$\frac{dp}{du}+2(1-u)=0;$$

имеем:

$$dp=2(u-1)\,du, \quad p=u^2-2u+C_1, \quad \frac{du}{u^2-2u+C_1}=d\xi.$$

Проведём до конца интеграцию последнего уравнения в случае, если корни двучлена в знаменателе действительны и различны, т. е. если $C_1=1-\alpha^2$, где $\alpha\neq 0$ — новая произвольная постоянная:

$$\frac{du}{(u-1)^2-\alpha^2}=d\xi, \quad \frac{du}{u-1-\alpha}-\frac{du}{u-1+\alpha}=2\alpha\,d\xi;$$

$$\ln\frac{u-1-\alpha}{u-1+\alpha}=2\alpha\xi+\ln C_2;$$

возвращаясь к первоначальным переменным и потенцируя, находим:

$$\frac{y-(1+\alpha)x^2}{y-(1-\alpha)x^2}=C_2x^{2\alpha},$$

откуда

$$y=\frac{(1+\alpha)x^2-C_2(1-\alpha)x^{2\alpha+2}}{1-C_2x^{2\alpha}}.$$

Уравнение $p=0$ даёт $y=Cx^2$ — семейство решений, получаемое при $C_2=0$.

Примечание. В некоторых случаях уравнение высшего порядка удаётся проинтегрировать до конца, применяя к нему последовательно различные способы понижения порядка уравнения. Но надо помнить, что возможность понижения порядка, а тем более приведения к квадратурам является исключительным случаем для общего уравнения порядка n. Если для практических надобностей надо проинтегрировать уравнение n-го порядка, неразрешимое в квадратурах, приходится прибегать к численным или графическим методам; так как при этом задача, вообще говоря, является тем более трудной, чем выше порядок уравнения, то представляющуюся возможность понижения порядка следует использовать перед численным интегрированием и в тех случаях, когда она не даёт возможности довести уравнение до квадратур.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

116. $nx^3y''=(y-xy')^2$.

117. $y^2(x^2y''-xy'+y)=x^3$.

118. $x^2y^2y''-3xy^2y'+4y^3+x^6=0$.

§ 4. Уравнения, левая часть которых является точной производной.

Если нам удалось убедиться, что левая часть уравнения (1) есть полная производная по x от некоторого дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка, т. е. что мы имеем тождественно по $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ соотношение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

или

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \quad (31)$$

то очевидно, что каждое решение уравнения (1) является решением дифференциального уравнения:

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C, \quad (32)$$

и, обратно, каждое решение уравнения (32) является решением уравнения (1). Таким образом, соотношение (32) является первым интегралом уравнения (1); нам удалось понизить порядок уравнения на единицу.

Пример 11. $y'' - xy' - y = 0$. Левая часть есть, очевидно, точная производная по x от дифференциального выражения $y' - xy$; следовательно, имеем первый интеграл $y' - xy = C_1$. В данном случае легко получить в квадратурах общее решение, так как полученное уравнение — линейное первого порядка. Мы находим:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2\right).$$

В некоторых случаях левая часть уравнения (1) не есть точная производная, но можно так преобразовать данное уравнение, чтобы в новом уравнении левая часть оказалась точной производной. Не останавливаясь на общей теории этого вопроса, покажем, как применяется это замечание на практике. Один случай применения этого метода мы имели при интеграции уравнения (22′), которое, по умножении на производную искомой функции, обращалось в такое уравнение, обе части которого были точными производными. Рассмотрим ещё примеры.

Пример 12. $y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 = \frac{2yy'}{x}$. Разделив обе части на yy', имеем: $\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$. Обе части суть точные производные. Первый интеграл имеет вид: $\ln y' + y^2 + \ln y = 2\ln x + \ln C_1$, откуда $yy'e^{y^2} = C_1x^2$; обе части опять являются точными производными. Отсюда полный интеграл $\frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{C_1x^3}{3} + C_2$, или $y = \sqrt{\ln(C_1'x^3 + C_2')}$ (C_1' и C_2' — произвольные постоянные).

Пример 13. Уравнение $yy'' = 2y'^2$ проще всего интегрируется следующим образом: делим обе части на $y'y$; получаем: $\frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y}$ — в обеих частях точные производные. Далее,

$$\ln y' = 2\ln y + \ln C_1, \quad \frac{dy}{dx} = C_1y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad y = -\frac{1}{C_1x + C_2}.$$

ЗАДАЧИ.

119. Найти первый интеграл уравнения

$$y'y'' - x^2yy' - xy^2 = 0.$$

Проинтегрировать до конца уравнения:

120. $x(x^2y' + 2xy)y'' + 4xy'^2 + 8xyy' + 4y^2 - 1 = 0.$

121. $x(xy + 1)y'' + x^2y'^2 + (4xy + 2)y' + y^2 + 1 = 0.$

Проинтегрировать уравнения:

122. $yy'' - y'^2 - y'^4 = 0.$

123. $a^2y'' = 2x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$

124. $x^2yy'' + x^2y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0.$

125. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$ (см. пример 1 на стр. 153).

126. $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$ (дифференциальное уравнение парабол).

127. Найти дифференциальное уравнение кривых, у которых радиус кривизны пропорционален отрезку нормали между её основанием M и пересечением N с осью x (множитель пропорциональности μ: разобрать случаи $\mu = 1$, $\mu = -1$, $\mu = 2$; постоянное μ есть положительное или отрицательное число, смотря по тому, совпадает ли направление от M к центру кривизны с направлением MN или они противоположны).

128. Проинтегрировать уравнение конических сечений:

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2y^{V} = 0.$$

Проинтегрировать уравнения:

129. $y''^2 + 2xy'' - y' = 0.$

130. $y''^2 - 2xy'' - y' = 0.$

ГЛАВА V.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Определения и общие свойства.

1. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно совокупности величин y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ (y — искомая функция, x — независимое переменное). Таким образом, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x), \tag{1}$$

где «коэффициенты» a_0, $a_1, \ldots, a_n$ (так же как F) суть данные непрерывные функции от x (в частности, они могут быть постоянными или нулями). Если уравнение действительно имеет порядок n, то коэффициент a_0 не должен быть тождественно равен нулю. Допустим, что для значений x в интервале

$$a < x < b \tag{2}$$

$a_0(x) \neq 0$ и что все остальные коэффициенты и $F(x)$ непрерывны в этом интервале. Разделив обе части уравнения на $a_0(x)$ и введя обозначения: $p_i = \frac{a_i}{a_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f(x) = \frac{F(x)}{a_0}$, мы приведём уравнение (1) к виду:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{1'}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ и $f(x)$ — известные непрерывные функции от x. В дальнейшем мы будем преимущественно рассматривать линейное уравнение, приведённое к виду (1′).

Уравнение (1) или (1′) называется *неоднородным линейным уравнением* или *уравнением с правой частью*. Если же «правая часть» (или «свободный член») уравнения, $F(x)$ или $f(x)$, тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным линейным*:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{3}$$

или

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{3'}$$

Если уравнение (3) или (3′) имеет те же коэффициенты, как (1) или (1′), то оно называется однородным уравнением, *соответствующим* неоднородному уравнению (1) или (1′).

2. Отметим следующие общие свойства линейных дифференциальных уравнений:

1) *Уравнение остаётся линейным при замене независимого переменного.* В самом деле, преобразуем независимое переменное подстановкой

$$x = \varphi(\xi), \tag{4}$$

где φ есть произвольная непрерывная дифференцируемая n раз функция, производная которой $\varphi'(\xi)$ не обращается в нуль в рассматриваемом интервале $\alpha < \xi < \beta$, причём этот интервал соответствует изменению x в интервале (2) [это условие достаточно для существования обратной функции $\xi = \psi(x)$, определённой в интервале (2)]. Из равенства (4) имеем: $dx = \varphi'(\xi)\, d\xi$. Вычисляя выражения производных от y по x через производные по новому независимому переменному, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi}\right) = \frac{1}{\varphi'^2(\xi)}\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'^3(\xi)}\frac{dy}{d\xi}, \ldots$$

Легко видеть, что вообще $\frac{d^ky}{dx^k}$ выразится линейно (и однородно) через $\frac{dy}{d\xi}, \frac{d^2y}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^ky}{d\xi^k}$, с коэффициентами — непрерывными функциями от ξ; вставляя эти выражения в уравнение (1) и производя в коэффициентах a_i и в свободном члене $F(x)$ замену (4), мы опять получим линейное уравнение:

$$b_0\frac{d^ny}{d\xi^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{d\xi} + b_n y = \Phi(\xi),$$

причём $b_0(\xi) = \frac{a_0[\varphi(\xi)]}{[\varphi'(\xi)]^n} \neq 0$ в интервале $\alpha < \xi < \beta$.

Примечание. Очевидно, подстановка (4) преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное.

2) *Уравнение остаётся линейным при линейном преобразовании зависимого переменного.* Вводим новую функцию η, связанную с y уравнением:

$$y = v(x)\eta + \gamma(x), \tag{5}$$

где v, γ допускают непрерывные производные до порядка n включительно и $v(x) \neq 0$ в интервале (2). Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{d\eta}{dx} + v'\eta + \gamma',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2\eta}{dx^2} + 2v'\frac{d\eta}{dx} + v''\eta + \gamma''.$$

Очевидно, что вообще производная k-го порядка от y по x выразится линейно (но неоднородно) через k первых производных от η по x; результат подстановки этих выражений в (1) даёт опять линейное уравнение; его коэффициент при старшей производной $a_0 v(x)$, в силу сделанных предположений, не обращается в нуль в интервале (2).

Легко видеть, что подстановка:

$$y = v(x)\eta \tag{5'}$$

преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное.

Преобразованием (5′) часто пользуются, чтобы в преобразованном уравнении обратился в 0 коэффициент при $(n-1)$-й производной. В самом деле, из уравнения (5′) получаем:

$$y^{(n)} = v\eta^{(n)} + nv'\eta^{(n-1)} + \ldots, \qquad y^{(n-1)} = v\eta^{(n-1)} + \ldots$$

Вставляя эти выражения в уравнение (3′), находим:

$$v\eta^{(n)} + (nv' + p_1 v)\eta^{(n-1)} + \ldots = 0.$$

Для того чтобы отсутствовал член с $\eta^{(n-1)}$, достаточно выбрать $v(x)$ так, чтобы было $nv' + p_1 v = 0$, т. е. $v = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$.

Примечание. Мы ограничиваемся рассмотрением интервала (2), где коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль, чтобы иметь возможность применять теорему о существовании и единственности решения; эта теорема доказана в предшествующей главе для уравнения n-го порядка, разрешённого относительно старшей производной. Заметим, что условия Липшица для уравнения (1′) выполнены во всяком замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b). В самом деле, написав уравнение (1′) в виде:

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_n(x)y + f(x) \equiv$$
$$\equiv F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -p_n(x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-i}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

В замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$ непрерывные функции $p_i(x)$ ограничены $(i = 1, 2, \ldots, n)$, откуда и следует выполнение условий Липшица; в том же интервале $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна для любых значений $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Следовательно, в силу теоремы Коши, *существует одно и только одно решение* $y(x)$ *уравнения* (1′) *или* (3′), *которое при данном начальном значении* $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ *принимает значение* y_0, *в то время как значения производных* $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, *причём* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *любые заданные числа.*

В главе VII мы докажем, что *определённое таким образом решение* $y(x)$ *линейного уравнения существует во всём интервале* $[a, b]$; для общего уравнения n-го порядка мы могли в предыдущей главе утверждать существование решения только в интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$.

§ 2. Общая теория линейного однородного уравнения.

1. Рассмотрим линейное уравнение без правой части:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (3')$$

Через $L[y]$ мы будем сокращённо обозначать результат применения к функции y совокупности операций [дифференцирование, умножение на функции $p_i(x)$ и сложение], указываемых левой частью уравнения (3′), и будем называть $L[y]$ *линейным дифференциальным выражением* или *линейным дифференциальным оператором*. Линейный оператор обладает следующими двумя важными свойствами:

1) $$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad (6)$$

где y_1 и y_2 — любые функции, имеющие n непрерывных производных. В самом деле, раскрывая *значения символа оператора, имеем:*

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1 (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + \\ + p_n (y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1) + \\ + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2) = L[y_1] + L[y_2].$$

Оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых. Это свойство доказано для суммы двух слагаемых, но оно, очевидно, распространяется на сумму любого числа слагаемых.

2) $$L[Cy] = CL[y], \qquad (7)$$

где y — любая n раз дифференцируемая функция, а C — постоянная, т. е. *постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора.* Доказательство легко проводится подобно тому как в предыдущем случае. На основании свойств линейного оператора, выражаемых тождествами (6) и (7), легко получаются следующие теоремы о решениях однородного линейного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Если y_1 и y_2 суть два (частных) решения уравнения (3′), то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как y_1, y_2 суть решения, то имеем тождества: $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$. Но, в силу (6),

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

что, в силу условия, равно нулю тождественно. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если y_1 есть решение уравнения (3′), то Cy_1 есть также решение этого уравнения (C — любая постоянная).*

Доказательство. В силу свойства (7), $L[Cy_1]=CL[y_1]$, а по условию $L[y_1]=0$, откуда и следует теорема.

Следствие 1. Если имеем частные решения уравнения (3′) $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то выражение $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_k$ есть также решение этого уравнения ($C_1, C_2, \ldots, C_k$ — любые постоянные).

Следствие 2. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка, то выражение

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \tag{8}$$

есть решение, содержащее n произвольных постоянных; если все эти постоянные существенны, то выражение (8) представляет общее решение [1]).

2. Вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять частные решения, чтобы выражение (8) являлось общим решением однородного уравнения, разрешается в связи с понятием *линейной зависимости функций*. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определённые в интервале (a, b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественно соотношение:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0. \tag{9}$$

Если не существует таких постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, чтобы равенство (9) имело место для всех рассматриваемых значений x (причём предполагается, что не все α_i равны нулю), то функции называются *линейно независимыми* (в данном интервале). В последующем мы часто будем иметь дело с интервалом $(-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим один частный случай и несколько примеров.

1) Если одна из функций, например φ_n, равна в данном интервале нулю, то все функции линейно зависимы, так как мы имеем тождество:

$$\alpha_n\varphi_n(x)=0,$$

в котором можно взять $\alpha_n\neq 0$.

2) Функции

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$$

линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, а также в любом конечном интервале. Допустив противное, мы получили бы равенство

$$\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n=0$$

для всех рассматриваемых значений x (не все α равны нулю). Между тем написанное равенство есть алгебраическое уравнение

---

[1]) Очевидно, всякое линейное однородное уравнение допускает частное решение $y=0$. Это решение называется тривиальным; в теории интеграции мы его не будем принимать в расчёт.

степени не выше n; оно может быть справедливым не более как для n значений x.

3) Пусть k_1, k_2, ..., k_n — любые действительные не равные между собой числа, $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Тогда функции, определённые для $x > 0$,

$$x^{k_1},\ x^{k_2},\ \ldots,\ x^{k_n}$$

линейно независимы. Допустим противное; пусть имеет место тождество

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0$$

для всех значений $x > 0$. Умножая предполагаемое тождество на x^{-k_1}, получаем тождество:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x^{k_2 - k_1} + \ldots + \alpha_n x^{k_n - k_1} = 0;$$

замечая, что все показатели > 0, получим переходом к пределу при $x \to 0$, что необходимо $\alpha_1 = 0$. Поэтому тождество может иметь только такой вид:

$$\alpha_2 x^{k_2} + \alpha_3 x^{k_3} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0.$$

Повторяя последовательно то же рассуждение, получим $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$, т. е. противоречие с предположением, что не все α_i равны нулю. Это противоречие доказывает наше утверждение (такое же рассуждение можно было бы применить и к предыдущему примеру).

4) Примером линейно зависимой системы являются функции $\varphi_1 = \sin^2 x$, $\varphi_2 = \cos^2 x$, $\varphi_3 = 1$. Действительно, полагая $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, получаем тождество (для $-\infty < x < \infty$):

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

3. Пусть мы имеем n функций от x, имеющих непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Определитель

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots, & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots, & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

называется *определителем Вронского* этих функций. Легко доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3. *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен нулю.*

Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, т. е. существует тождественное соотношение:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \tag{11}$$

где не все α_i равны нулю. Без ограничения общности мы можем допустить, что $\alpha_n \neq 0$ (иначе мы изменили бы нумерацию функций). Разрешая соотношение (11) относительно y_n, получаем тождество:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1} \tag{11'}$$
$$\left(\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\right).$$

Из тождества (11') дифференцированием по x получаем:

$$\left.\begin{array}{l} y_n' = \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)} = \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}. \end{array}\right\} \tag{11''}$$

Умножаем в выражении (10) первый столбец на $-\beta_1$, второй на $-\beta_2, \ldots, (n-1)$-й на $-\beta_{n-1}$ и прибавляем к последнему; величина определителя W не изменится, но, в силу соотношений (11') и (11''), последний столбец нового определителя будет состоять из нулей, откуда следует, что $W \equiv 0$, а это и требовалось доказать.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть частные решения однородного уравнения (3'), то справедлива обратная, притом более сильная теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы* [в интервале (2)], *то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Допустим противное: пусть $W(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Обозначим величины y_i при $x = x_0$ через y_{i0} и значения $y_i^{(k)}(x_0)$ — через $y_{i0}^{(k)}$ и составим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Рассматривая в уравнениях (12) величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$ как неизвестные, мы получим для определителя системы (12) значение $W(x_0) = 0$. Следовательно, однородная система (12) из n уравнений с n неизвестными имеет систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причём не все C_i равны нулю. Составим функцию

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n; \tag{8'}$$

в силу следствия 1 теорем 1 и 2 она является решением уравнения (3′); в силу условий (12), мы имеем при $x = x_0$:

$$\tilde{y}(x_0) = 0,\ \tilde{y}'(x_0) = 0,\ \ldots,\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad (12')$$

Начальные условия (12′), по теореме существования, определяют единственное решение уравнения (3′). Но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y = 0$, следовательно, $\tilde{y}(x) \equiv 0$ в интервале $a < x < b$), и мы получаем из равенства (8′):

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0$$

для всякого x в интервале (2), причём не все C_i равны нулю, т. е. функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы против предположения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 3 и 4 можно объединить в следующей формулировке: *определитель Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка* (3′), *или тождественно равен нулю, или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны.*

Любая система из n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения (3′) называется *фундаментальной системой*.

Следствие теоремы 4. Функции, образующие фундаментальную систему, линейно независимы во всяком частичном интервале (α, β), содержащемся в (a, b). Это следует из необращения в нуль определителя Вронского.

ТЕОРЕМА 5. *Для всякого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система.*

В самом деле, возьмём любую систему таких n^2 чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, чтобы составленный из них определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

был отличен от нуля. Определим n частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (3′) начальными условиями: при $x = x_0$ имеем $y_i = a_{i1}$, $y'_i = a_{i2}, \ldots, y_i^{(n-1)} = a_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно замечанию в конце § 1, функции определены во всём интервале (2).

Определитель (13) представляет значение определителя Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ при $x = x_0$. Таким образом, $W(x)$ заведомо не равен нулю при $x = x_0$, откуда, в силу теоремы 3, следует, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему. [Вспомним, что $W(x)$ не равен нулю ни для какого x в интервале (a, b).]

Примечание. Матрицу a_{ik} с определителем (13), отличным от нуля, часто бывает полезно выбрать по следующему закону: $a_{ik}=0$, когда $i \neq k$, $a_{ik}=1$ при $i=k$. Очевидно, определитель (13) равен в этом случае единице. Соответствующую фундаментальную систему $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы будем называть *нормальной* фундаментальной системой; составляющие эту систему функции удовлетворяют следующим начальным условиям: при $x=x_0$

$$\begin{aligned} &y_1=1, \ y_1'=0, \ \ldots, \ y_1^{(n-1)}=0, \\ &y_2=0, \ y_2'=1, \ \ldots, \ y_2^{(n-1)}=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n=0, \ y_n'=0, \ \ldots, \ y_n^{(n-1)}=1. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L[y]=0$, то общее решение даётся формулой:*

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{8}$$

По определению, решение, содержащее n произвольных постоянных, называется общим, если из него при определённых числовых значениях постоянных получается любое частное решение. А как было указано, в силу теоремы существования и единственности, любое частное решение однозначно определяется начальными условиями: при $x=x_0$

$$y=y_0, \ y'=y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \tag{14}$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые числа, и $a<x_0<b$. Мы докажем, что решение (8) есть общее, если покажем, что можно в формуле (8) определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (14). Для определения постоянных C_i мы получаем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C_1y_{10}+C_2y_{20}+\ldots+C_ny_{n0}=y_0, \\ &C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+\ldots+C_ny_{n0}'=y_0', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1y_{10}^{(n-1)}+C_2y_{20}^{(n-1)}+\ldots+C_ny_{n0}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь y_{i0} обозначает значение функции $y_i(x)$ при $x=x_0$; $y_{i0}^{(k)}$ есть значение производной $y_i^{(k)}(x)$ при $x=x_0$. Определитель системы (15) есть определитель Вронского, в котором вместо x подставлено x_0, т. е. $W(x_0)$; в силу теоремы 4, $W(x_0)\neq 0$; следовательно, система уравнений (15) всегда допускает, и притом единственную, систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Выражение (8), в котором C имеют полученные таким образом значения, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (14). Теорема доказана.

Примечание. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ представляет нормальную фундаментальную систему, то решение, удовлетворяющее начальным условиям (14), получает особенно простую форму:

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x).$$

В справедливости этого утверждения убеждаемся, подставляя в это выражение и в выражения, полученные из него последовательным дифференцированием, значение $x = x_0$.

Пример 1. Уравнение $y'' - y = 0$ имеет, как легко проверить, два частных решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Для выяснения вопроса об их линейной зависимости или независимости составляем определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следовательно, e^x и e^{-x} составляют фундаментальную систему, и общее решение напишется так: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Составим теперь нормальную фундаментальную систему $\overline{y}_1(x)$, $\overline{y}_2(x)$, удовлетворяющую начальным условиям: $\overline{y}_1(0) = 1$, $\overline{y}_1'(0) = 0$; $\overline{y}_2(0) = 0$, $\overline{y}_2'(0) = 1$. Очевидно, $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ представляются как линейные комбинации функций e^x и e^{-x}: $\overline{y}_1(x) = ae^x + be^{-x}$, $\overline{y}_2(x) = ce^x + de^{-x}$. Для определения коэффициентов a, b, c, d пользуемся начальными условиями решений $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$: $1 = a + b$, $0 = a - b$, $0 = c + d$, $1 = c - d$; отсюда

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{y}_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \overline{y}_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

При помощи функций $\overline{y}_1$ и $\overline{y}_2$ сразу напишем решение, удовлетворяющее условиям Коши: при $x = x_0$ $y = y_0$, $y' = y_0'$. Это решение будет:

$$y = y_0 \operatorname{ch} x + y_0' \operatorname{sh} x.$$

4. Мы видели, что формула (8) даёт любое решение линейного однородного уравнения n-го порядка, если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы. Отсюда легко получается доказательство такой теоремы:

ТЕОРЕМА 7. *Если мы имеем $n+1$ частных решений уравнения* (3′)

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1},$$

то между ними необходимо существует линейная зависимость.

Для доказательства рассмотрим первые n функций: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Возможны два случая:

1) Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы; тогда теорема справедлива, так как линейное соотношение между n функциями есть частный случай линейного соотношения между $n+1$ функциями, где постоянный множитель при y_{n+1} равен нулю.

2) Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы; тогда они образуют фундаментальную систему, через которую выражается линейным образом с постоянными коэффициентами любое частное решение; в частности, для y_{n+1} получим:

$$y_{n+1} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n.$$

Это и есть искомая линейная зависимость. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Если два линейных однородных уравнения*

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \\ y^{(n)} + \bar{p}_1 y^{(n-1)} + \ldots + \bar{p}_n y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой, т. е. $p_i(x) \equiv \bar{p}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Вычитая почленно уравнения (16), получаем новое уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$(p_1 - \bar{p}_1) y^{(n-1)} + (p_2 - \bar{p}_2) y^{(n-2)} + \ldots + (p_n - \bar{p}_n) y = 0. \tag{17}$$

Если p_1 и $\bar{p}_1$ не тождественно равны между собой, то найдётся, в силу их непрерывности, интервал $\alpha < x < \beta$, в котором $p_1 - \bar{p}_1 \neq 0$. Разделив обе части уравнения (17) на $p_1 - \bar{p}_1$, мы получим в интервале (α, β) уравнение вида (3′), т. е. со старшим коэффициентом, равным 1. Очевидно по самому построению уравнения (17), что оно допускает те же решения, что уравнения (16), т. е. уравнение $(n-1)$-го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, допускает (см. следствие теоремы 4) n независимых интегралов. Противоречие с теоремой 7 показывает, что $p_1(x) \equiv \bar{p}_1(x)$; таким образом, уравнение (17) имеет вид:

$$(p_2 - \bar{p}_2) y^{(n-2)} + (p_3 - \bar{p}_3) y^{(n-3)} + \ldots + (p_n - \bar{p}_n) y = 0.$$

Рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что $p_2 \equiv \bar{p}_2$, и далее, таким же образом докажем, что

$$p_3 \equiv \bar{p}_3, \ \ldots, \ p_n \equiv \bar{p}_n.$$

Следствие. Фундаментальная система вполне определяет линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1.

Решим теперь такую задачу:

Дана фундаментальная система (в интервале $a < x < b$): $y_1, y_2, \ldots, y_n$; построить соответствующее дифференциальное уравнение.

Для этой цели приравниваем нулю следующий определитель, в котором y обозначает искомую функцию:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Разлагая его по элементам последнего столбца, мы убеждаемся в том, что равенство (18) представляет собой однородное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно функции y. При подстановке вместо y функций y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) мы получаем определитель с двумя равными столбцами. Он тождественно равен нулю; следовательно, уравнение (18) допускает частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Коэффициент при $y^{(n)}$ есть $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$; он, как нам известно, не обращается в нуль в интервале (a, b). Разделив на него обе части уравнения (18), получим уравнение n-го порядка со старшим коэффициентом, равным единице, а по доказанному такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой. Задача, таким образом, решена.

Напишем уравнение (18) в развёрнутом виде:

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Если исходное уравнение было написано в виде:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0, \tag{3'}$$

то сравнение коэффициентов даёт нам тождество:

$$p_1=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Легко убедиться в том, что определитель в числителе есть производная от определителя Вронского, стоящего в знаменателе; в самом деле, производная по x определителя, составленного из функций от x, равна сумме n определителей, из которых у первого в первой строке функции заменены производными, а остальные не изменены, у второго во второй строке функции заменены производными и т. д., у n-го в последней строке функции заменены производными. Применяя это правило дифференцирования к определителю Вронского, мы получим $n-1$ первых слагаемых в виде определителей, имеющих две равные строки, т. е. обращающиеся в нуль, а последнее слагаемое, не равное нулю, есть как раз числитель в выражении для p_1. Итак, мы имеем:

$$p_1=-\frac{W'(x)}{W(x)},$$

откуда $W(x)=Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dx}$. Выражаем постоянное C через начальное значение $W(x)$ при $x=x_0$; получаем окончательно:

$$W(x)=W(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1\,dx}. \tag{19}$$

Равенство (19), определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, носит название *формулы Остроградского — Лиувилля.*

Применим формулу Остроградского — Лиувилля к нахождению о б щ е г о р е ш е н и я у р а в н е н и я в т о р о г о п о р я д к а:

$$y''+p_1y'+p_2y=0,$$

у к о т о р о г о н а м и з в е с т н о о д н о ч а с т н о е р е ш е н и е y_1. Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1.

Составляем $W[y_1, y]$ и пишем его значение по формуле (19):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1\,dx}.$$

Получаем для y линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем:

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int p_1\,dx};$$

деля обе части на y_1^2, находим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\,Ce^{-\int p_1\,dx},$$

откуда y определяется квадратурой:

$$y = y_1\left\{\int \frac{Ce^{-\int p_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C'\right\}. \qquad (20)$$

Полученное решение содержит два произвольных постоянных и, следовательно, является общим. Итак, *если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.*

Пример 2. Легко убедиться в том, что уравнение

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$$

допускает частное решение $y_1 = x$. В нашем случае $p_1 = \frac{-2x}{1 - x^2}$, и формула (20) даёт:

$$y = x\left\{\int \frac{Ce^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}\,dx + C'\right\} = x\left\{C\int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} + C'\right\} =$$

$$= x\left\{C\int\left[\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1 - x} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1 + x}\right] + C'\right\} =$$

$$= x\left\{C\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right] + C'\right\} = C'x + C\left(\frac{1}{2}\,x\ln\frac{1 + x}{1 - x} - 1\right).$$

Это — общее решение данного уравнения.

Примечание 1. Всякое линейное дифференциальное уравнение (3′) имеет бесконечное множество фундаментальных систем. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — какая-нибудь фундаментальная система этого

уравнения. Составим новую систему частных решений:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n, \\ Y_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Система $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ будет фундаментальной, если функции Y_i линейно независимы, а для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель подстановки (21)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. В самом деле, если система $\{Y_i\}$ есть фундаментальная, то через неё, в частности, выражаются решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. система уравнений (21) должна быть разрешима относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. должно быть $D \neq 0$. Обратно, если $D \neq 0$, то y_i выражаются линейно через Y_i; так как любое решение выражается через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то оно выразится и через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т. е. эти последние решения образуют фундаментальную систему.

Составляя определитель Вронского $W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$, мы легко убеждаемся в том, что он представляет собой произведение (по правилу «строки на строки») определителей D и $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, т. е.

$$W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = DW[y_1, y_2, \ldots, y_n].$$

Следовательно, при переходе от одной фундаментальной системы данного уравнения к другой определитель Вронского изменяется только на постоянный множитель — определитель линейной подстановки.

Примечание 2. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — любая система n раз дифференцируемых линейно независимых функций. Если определитель Вронского не обращается в нуль в интервале $a < x < b$, то выражение (18) даёт дифференциальное уравнение, имеющее данную систему в качестве фундаментальной. Заметим, что так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ произвольны, то условие необращения в нуль определителя Вронского ни в одной точке рассматриваемого интервала надо ввести как новое требование.

Примечание 3. Если составлять дифференциальное уравнение, допускающее в качестве фундаментальной системы наперёд заданную систему из n линейно независимых функций, то точки, в которых

определитель Вронского этой системы обращается в нуль, будут **особыми точками** построенного уравнения; в них будет обращаться в нуль коэффициент при $y^{(n)}$.

Пример 3. Построить уравнение, имеющее в качестве фундаментальной системы функции x, x^2, x^3. Строим уравнение по формуле (18):

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^2 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам последнего столбца, получаем:

$$2x^3y''' - 6x^2y'' + 12xy' - 12y = 0.$$

Здесь $W(x) = 2x^3$ и не обращается в нуль в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Для этих интервалов имеем дифференциальное уравнение:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0.$$

ЗАДАЧИ.

Построить уравнения, имеющие фундаментальные системы:

131. $\cos x$, $\sin x$.

132. $\cos^2 x$, $\sin^2 x$.

В каких интервалах коэффициенты последнего уравнения являются непрерывными (если старший коэффициент $= 1$)? Показать, что другой фундаментальной системой того же уравнения является 1, $\cos 2x$.

133. Вычислить (с точностью до произвольного множителя) определитель Вронского для уравнения Лежандра:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

134. Проинтегрировать уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

135. То же для уравнения $y'' \sin^2 x = 2y$; частное решение $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Понижение порядка линейного однородного уравнения. Линейное однородное уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = 0 \qquad (3')$$

относится к классу уравнений, однородных относительно $y, y', y'', \ldots$; поэтому подстановка $y = e^{\int z\,dx}$ приводит его к уравнению порядка $n-1$ (глава IV, § 3, 3). Однако эта подстановка в большинстве случаев нецелесообразна, так как преобразованное уравнение (относительно z) уже не является линейным и, следовательно, теряет те простые свойства, которые характеризуют линейные уравнения. Мы

рассмотрим здесь метод понижения порядка, если известны частные решения; при этом окажется, что *каждое известное частное решение позволяет понизить порядок уравнения на единицу*, причём преобразованное уравнение остаётся линейным. Таким образом, каждое известное частное решение является шагом вперёд в нахождении общего решения.

Пусть $y = y_1$ есть частное решение уравнения (3′). Вводим новую искомую функцию z соотношением:

$$y = y_1 z. \tag{22}$$

Соотношение (22) разрешимо относительно z в тех интервалах, где y_1 не обращается в нуль; только такие интервалы мы будем рассматривать. Вычисляем из соотношения (22) производные от y. Мы имеем:

$$y' = y_1 z' + y_1' z,$$
$$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = y_1 z^{(n)} + \binom{n}{1} y_1' z^{(n-1)} + \binom{n}{2} y_1'' z^{(n-2)} + \ldots + y_1^{(n)} z.$$

Подстановка в уравнение (3′) даёт:

$$y_1 z^{(n)} + \left[\binom{n}{1} y_1' + p_1 y_1\right] z^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + [y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_1' + p_n y_1]\, z = 0.$$

Для z мы получили опять уравнение порядка n; но коэффициент при z есть $L[y_1]$, он тождественно равен нулю, так как y_1 есть решение уравнения (3′). Следовательно, в полученном уравнении порядок понижается, если ввести новую искомую функцию $u = z'$. Разделив, кроме того, все члены последнего уравнения на y_1, мы приведём его к виду:

$$u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} u = 0 \tag{23}$$

— линейному уравнению порядка $n-1$. Выражение функции u через y, очевидно, следующее:

$$u = z' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

Пусть для последнего уравнения получена фундаментальная система:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1}.$$

Тогда система n решений для z будет:

$$1\ ^{1}),\quad \int u_1\,dx,\quad \int u_2\,dx,\ \ldots,\quad \int u_{n-1}\,dx,$$

а соответствующая система для y будет:

$$y_1,\ y_2 = y_1 \int u_1\,dx,\quad y_3 = y_1 \int u_2\,dx,\ \ldots,\ y_n = y_1 \int u_{n-1}\,dx.$$

Покажем, что последние решения образуют фундаментальную систему уравнения (3'). Допустим, что между ними существует линейная зависимость:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0;$$

деля на y_1 (который, по условию, в рассматриваемых интервалах отличен от нуля), получим:

$$C_1 + C_2 \int u_1\,dx + C_3 \int u_2\,dx + \ldots + C_n \int u_{n-1}\,dx = 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по x, получаем:

$$C_2 u_1 + C_3 u_2 + \ldots + C_n u_{n-1} = 0,$$

что противоречит условию линейной независимости системы u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$. Следовательно, $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$; так как $y_1 \neq 0$, то, очевидно, также имеем $C_1 = 0$, и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему.

Итак, *если известно частное решение уравнения* (3'), *то задача интегрирования этого уравнения приводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка* $n-1$.

Пусть теперь известно два линейно независимых частных решения уравнения (3'), y_1 и y_2. Вводя, как выше, новую искомую функцию $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$, мы получаем для u уравнение (23) порядка $n-1$. Но теперь это уравнение имеет один известный интеграл $u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, и поэтому оно, в свою очередь, допускает понижение порядка на единицу [2]).

Итак, *если известны два частных линейно независимых решения, то порядок уравнения может быть понижен на две единицы.*

---

[1]) Легко видеть, что если в линейном однородном уравнении коэффициент при искомой функции равен нулю, то постоянная является частным решением такого уравнения, и обратно, если уравнение допускает в качестве решения постоянную, то коэффициент при искомой функции равен нулю.

[2]) Решение $\left(\frac{y_1}{y_1}\right)'$ есть тривиальное; с другой стороны, u_1 не есть тривиальное решение, если y_1 и y_2 линейно независимы; в самом деле, если $u_1 \equiv 0$, то $\frac{y_2}{y_1} = C$ (постоянной), откуда $Cy_1 - y_2 = 0$, против условия.

Пусть вообще известно r линейно независимых частных решений уравнения (3′) ($r < n$):

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_r.$$

Подстановка $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$ опять приводит к уравнению (23), причём нам известно $r-1$ его частных решений:

$$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \; \ldots, \; u_{r-1} = \left(\frac{y_r}{y_1}\right)'.$$

Эти решения линейно независимы; в самом деле, если мы допустим существование соотношения:

$$\alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \ldots + \alpha_r u_{r-1} = 0,$$

то, интегрируя его по x, получим:

$$\alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_3 \frac{y_3}{y_1} + \ldots + \alpha_r \frac{y_r}{y_1} = -\alpha_1$$

($-\alpha_1$ есть постоянная интеграции), или

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_r y_r = 0,$$

что противоречит предположению о линейной независимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

Уравнение (23) имеет, таким образом, $r-1$ известных линейно независимых решений; вводя подстановку $v = \left(\frac{u}{u_1}\right)'$ (v — новая искомая функция), мы получим для v линейное уравнение порядка $n-2$, имеющее $r-2$ линейно независимых частных решений $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)'$, $\left(\frac{u_3}{u_1}\right)'$, $\ldots$, $\left(\frac{u_{r-1}}{u_1}\right)'$. Мы можем применить к нему то же рассуждение, и в результате подобных преобразований придём, наконец, к уравнению порядка $n-r$. Следовательно, *если известно r частных линейно независимых решений линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен на r единиц.*

Примечание. Если известно $n-1$ частных решений, то в результате понижения мы придём к уравнению первого порядка, которое интегрируется в квадратурах; в этом случае общее решение может быть получено в квадратурах.

ЗАДАЧИ.

136. Найти общее решение уравнения $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, зная частные решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

137. Найти общее решение уравнения $xy''' - y'' + xy' - y = 0$, зная его частное решение $y_1 = x$ (см. задачу 131).

138. То же для уравнения $(1-x^2)\,y''' - xy'' + y' = 0$, частное решение $y = x^2$.

§ 3. Неоднородные линейные уравнения.

1. Общие свойства. Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение вида:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x), \tag{1'}$$

где $f \neq 0$.

Однородное линейное уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю,

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{3'}$$

называется, как указано выше, однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1′). Очевидно, уравнения (1′) и (3′) не имеют общих решений.

ТЕОРЕМА. *Если известно какое-нибудь частное решение Y неоднородного уравнения* (1′), *то общее его решение есть сумма этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Так как Y есть решение уравнения (1′), то имеем тождество:

$$L[Y] = f(x); \tag{24}$$

введём новую искомую функцию z, полагая

$$y = Y + z. \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (1′), имеем, в силу свойства (6) линейного оператора $L[y]$,

$$L[Y] + L[z] = f(x);$$

принимая во внимание тождество (24), получаем отсюда:

$$L[z] = 0$$

— однородное уравнение, соответствующее (1′).

Пусть фундаментальная система соответствующего уравнению (1′) однородного уравнения (3′) будет:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Тогда общее решение уравнения (3′) имеет вид (§ 2):

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Подставляя это выражение вместо z в формулу (25), получаем общее решение неоднородного уравнения (1′):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + Y. \tag{26}$$

Это уравнение содержит n произвольных постоянных; чтобы доказать, что эти постоянные существенные, покажем, что из выражения (26) при надлежащем выборе значений постоянных C_1, C_2, ..., C_n

получится решение, удовлетворяющее любым начальным данным Коши, т. е. при $x=x_0$, где x_0 — любое значение из интервала (2), мы будем иметь:

$$y=y_0,\ y'=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любая данная система n чисел. Последовательным дифференцированием выражения (26) находим:

$$\left.\begin{aligned} y' &= C_1y'_1 + C_2y'_2 + \ldots + C_ny'_n + Y', \\ y'' &= C_1y''_1 + C_2y''_2 + \ldots + C_ny''_n + Y'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (26')$$

В выражениях (26) и (26') надо в левых частях вместо $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ подставить соответственно $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, а в правых частях во всех функциях дать переменному x значение x_0; получится система n линейных уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы есть значение определителя Вронского $W(x)$ при $x=x_0$; при этом $W(x_0)\neq 0$, так как система $y_1, y_2, \ldots, y_n$, по предположению, фундаментальная. Таким образом, для $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получим вполне определённые значения, и решение (26), действительно, является общим. Теорема доказана.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $y''+y=3x$. Легко видеть, что частным решением будет $y=3x$. Соответствующее однородное уравнение $y''+y=0$ имеет два линейно независимых частных решения: $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$. В силу изложенного общее решение будет: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+3x$. Решим теперь для данного уравнения задачу Коши: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=1$, $y'=-1$ при $x=0$. Имеем: $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+3$. Подставляя начальные значения, находим: $C_1=1$, $C_2+3=-1$, откуда $C_2=-4$; искомое решение есть $y=\cos x-4\sin x+3x$.

Пусть, далее, известно одно частное решение y_1 однородного уравнения (3'), соответствующего уравнению (1'). Подобно тому, как в случае однородного уравнения, применяем подстановку $y=y_1z$ и получаем уравнение, не содержащее явно искомой функции z; после этого, полагая $z'=u$, получим линейное уравнение (неоднородное) порядка $n-1$. Итак, *если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения, преобразование переменного* $u=\left(\dfrac{y}{y_1}\right)'$ *понижает порядок неоднородного уравнения на единицу*. Аналогично § 2, 5, легко получается также следующий результат: *если известны r частных линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, то порядок неоднородного уравнения может быть понижен на r единиц.*

Предположим теперь, что известны m частных решений неоднородного уравнения (1′) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Введём новую искомую функцию z, связанную с y уравнением:

$$y = Y_1 + z, \text{ или } z = y - Y_1.$$

Как показано выше, z удовлетворяет однородному уравнению, которое соответствует неоднородному уравнению (1′). Подставляя вместо y функции $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, мы, кроме тривиального решения $z = 0$, получим $m - 1$ решений однородного уравнения:

$$z_1 = Y_2 - Y_1, \quad z_2 = Y_3 - Y_1, \ldots, \quad z_{m-1} = Y_m - Y_1.$$

Таким образом, нам известны $m - 1$ решений однородного уравнения (3′), и если они линейно независимы, то его порядок может быть понижен на $m - 1$ единиц. Итак, *если известны m частных решений неоднородного линейного уравнения*, то при указанном условии *его интегрирование приводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка $n - m + 1$*.

Пример 5. Уравнение $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$ имеет, как легко проверить, два частных решения: $Y_1 = 1$, $Y_2 = x$; следовательно, соответствующее однородное уравнение имеет решение $y_1 = x - 1$. Комбинируя обе подстановки (25) и (22), вводим новую искомую функцию z при помощи уравнения:

$$y = 1 + (x - 1)z,$$

откуда

$$y' = (x - 1)z' + z, \quad y'' = (x - 1)z'' + 2z'.$$

Подставляя полученные выражения в данное уравнение, находим:

$$(2x - x^2)(x - 1)z'' + 2[(2x - x^2) + (x - 1)^2]z' = 0,$$

откуда

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{2}{x - 1} + \frac{2 - 2x}{2x - x^2}, \quad z' = C_1\frac{2x - x^2}{(x - 1)^2} = -C_1 + \frac{C_1}{(x - 1)^2};$$

$$z = -C_1x - \frac{C_1}{x - 1} + C_2;$$

подставляя в выражение для y, получаем: $y = -C_1x^2 + C_2(x - 1) + 1$ — общее решение.

ЗАДАЧА.

139. Решить уравнение $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$, зная частное решение $y = x$ соответствующего однородного уравнения.

2. Метод вариации постоянных. Из изложенного в предыдущем разделе следует, что для решения неоднородного уравнения достаточно знать фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения и одно частное решение неоднородного

уравнения; в рассматриваемых примерах это частное решение являлось заданным.

Теперь мы докажем следующую теорему:

Если известна фундаментальная система соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения может быть найдено при помощи квадратур.

Мы дадим способ решения неоднородного уравнения, принадлежащий Лагранжу и называемый *методом вариации постоянных*.

Пусть дано неоднородное линейное уравнение:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x), \qquad (1')$$

где $f(x)$ не равно тождественно нулю, и пусть нам известна фундаментальная система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0. \qquad (3')$$

Общее решение уравнения (3′) будет:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (8)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Выражение (8) удовлетворяет уравнению (3′) и, следовательно, не может удовлетворять уравнению (1′), пока C_i остаются постоянными. Поставим себе цель — получить решение уравнений (1′) в той же форме (8), где, однако, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ будут функциями независимого переменного x. Мы получаем n новых неизвестных функций; для их определения нужно иметь n уравнений, — одно из них получится из условия, что выражение (8) (с переменными C_i) удовлетворяет уравнению (1′), остальные $n-1$ уравнений мы можем задать произвольно; мы их будем задавать таким образом, чтобы выражения для производных от y имели наиболее простой вид.

Дифференцируем равенство (8) по x:

$$y'=C_1y'_1+C_2y'_2+\ldots+C_ny'_n+y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}.$$

Мы записали члены, полученные от дифференцирования, в две строки; в качестве первого из числа $n-1$ дополнительных уравнений возьмём уравнение, которое получится, если вторую строку приравнять нулю:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0. \qquad (27_1)$$

В таком случае для y' получим выражение:

$$y'=C_1y'_1+C_2y'_2+\ldots+C_ny'_n, \qquad (28_1)$$

которое имеет такой же вид, как и в случае постоянных C_i.

Для нахождения y'' дифференцируем равенство (28_1) по x; в полученном результате опять приравниваем нулю члены, содержащие производные функций C_i (это будет второе добавочное уравнение):

$$y_1'\frac{dC_1}{dx}+y_2'\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n'\frac{dC_n}{dx}=0, \qquad (27_2)$$

и для y'' получится выражение:

$$y''=C_1y_1''+C_2y_2''+\ldots+C_ny_n''. \qquad (28_2)$$

Продолжая таким образом, мы в последний раз введём добавочное условие на $(n-1)$-м шаге:

$$y_1^{(n-2)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-2)}\frac{dC_n}{dx}=0, \qquad (27_{n-1})$$

и выражение для $y^{(n-1)}$ будет иметь вид:

$$y^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+C_2y_2^{(n-1)}+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}. \qquad (28_{n-1})$$

Вычисляем, наконец, $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=C_1y_1^{(n)}+C_2y_2^{(n)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+$$
$$+y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}. \qquad (28_n)$$

Подставляя выражения (8), (28_1), ..., (28_{n-1}), (28_n) в уравнение (1′), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\left(y_i^{(n)}+p_1y_i^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_i'+p_ny_i\right)+$$
$$+y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}=f(x).$$

Замечаем, что множители при C_i под знаком суммы все равны нулю, так как они являются результатами подстановки в левую часть уравнения (3′) его решений, и мы получаем последнее уравнение для определения C_i:

$$y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}=f(x). \qquad (27_n)$$

Мы получили систему n неоднородных линейных уравнений (27_1), (27_2), ..., (27_{n-1}), (27_n) с n неизвестными $\frac{dC_i}{dx}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Определитель этой линейной системы есть определитель Вронского для фундаментальной системы; он не обращается в нуль; следовательно, разрешая её, мы получим $\frac{dC_i}{dx}$ как известные непрерывные функции от x:

$$\frac{dC_i}{dx}=\varphi_i(x),$$

откуда квадратурами находим:

$$C_i = \int \varphi_i(x)\,dx + \gamma_i$$

(γ_i — новые произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C в выражение (8), мы найдём общее решение уравнения (1′):

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\,dx.$$

Действительно, по самому его образованию это есть решение рассматриваемого уравнения; сумма членов, содержащих множители γ_i, представляет, как мы знаем, общее решение однородного уравнения (3′), а выражение

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\,dx$$

есть частное решение неоднородного уравнения (1′). Таким образом, действительно, при знании фундаментальной системы однородного уравнения мы получаем с помощью квадратур решение неоднородного уравнения.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $xy'' - y' = x^2$. Соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$ легко интегрируется: $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, $y' = Ax$, $y = \frac{A}{2}x^2 + B$; его фундаментальная система есть 1, x^2. Полагаем теперь в неоднородном уравнении $y = C_1 + C_2 x^2$; для определения C_1, C_2 имеем два уравнения:

$$1 \cdot \frac{dC_1}{dx} + x^2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \qquad 0 \cdot \frac{dC_1}{dx} + 2x \frac{dC_2}{dx} = x.$$

[Формула (27_n) выведена в предположении, что коэффициент при старшей производной равен 1.] Последовательно получаем:

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{x}{2} + \gamma_2, \quad \frac{dC_1}{dx} = -\frac{x^2}{2}, \quad C_1 = -\frac{x^3}{6} + \gamma_1.$$

Подставляя в выражение для y, находим общее решение:

$$y = \gamma_1 + \gamma_2 x^2 + \frac{x^3}{3}$$

(γ_1, γ_2 — произвольные постоянные).

ЗАДАЧИ.

140. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$, зная, что одно частное решение однородного уравнения есть $y = e^x$.

141. $(x^2+2)y''' - 2xy'' + (x^2+2)y' - 2xy = x^4 + 12.$

Указание. Уравнения $y''' + y' = 0$ и $y'' + y = 0$ имеют два общих решения.

142. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x^2 \ln x} y = e^x \left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$; частное решение однородного уравнения есть $y_1 = \ln x$.

§ 4. Сопряжённое уравнение.

1. Множитель линейного выражения. Поставим себе такую задачу: *дано линейное дифференциальное выражение*:

$$L[y] \equiv a_n y + a_{n-1} y' + a_{n-2} y'' + \ldots + a_1 y^{(n-1)} + a_0 y^{(n)}; \quad (29)$$

найти такую функцию $z(x)$, *чтобы по умножении на неё выражение* (29) *стало точной производной* по x при любой (n раз дифференцируемой) функции y. Эта функция $z(x)$ называется *множителем* дифференциального выражения $L[y]$. При этом мы предположим, что a_i суть функции от x, непрерывные в рассматриваемом интервале и имеющие непрерывные производные всех тех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем выражение (29) на искомую функцию z и вычисляем неопределённый интеграл

$$\int zL[y]\,dx,$$

причём каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от y до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y. Таким образом, будем иметь:

$$\int a_n yz\,dx = \int a_n yz\,dx,$$

$$\int a_{n-1} y'z\,dx = a_{n-1} zy - \int y (a_{n-1}z)'\,dx,$$

$$\int a_{n-2} y''z\,dx = a_{n-2} zy' - \int (a_{n-2}z)' y'\,dx =$$

$$= a_{n-2} zy' - (a_{n-2}z)' y + \int y (a_{n-2}z)''\,dx.$$

. . . .

$$\int a_1 y^{(n-1)} z\,dx = a_1 zy^{(n-2)} - (a_1 z)' y^{(n-3)} + (a_1 z)'' y^{(n-4)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2} (a_1 z)^{(n-2)} y + (-1)^{n-1} \int y (a_1 z)^{(n-1)}\,dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)} z\,dx = a_0 z y^{(n-1)} - (a_0 z)' y^{(n-2)} + (a_0 z)'' y^{(n-3)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} (a_0 z)^{(n-1)} y + (-1)^n \int y (a_0 z)^{(n)}\,dx.$$

Собирая отдельно члены, не содержащие интегралов, и под общим знаком интеграла члены, содержащие квадратуру, получаем:

$$\int zL[y]\,dx = a_{n-1}zy - (a_{n-2}z)'y + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y +$$
$$+ a_{n-2}zy' - (a_{n-3}z)'y' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{(n-2)}y' +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_1zy^{(n-2)} - (a_0z)'y^{(n-2)} + a_0zy^{(n-1)} +$$
$$+ \int y\{a_nz - (a_{n-1}z)' + (a_{n-2}z)'' - \ldots + (-1)^n(a_0z)^{(n)}\}\,dx,$$

или, перенося интеграл в левую часть и вводя новые обозначения,

$$\int \{zL[y] - yM[z]\}\,dx = \Psi[y, z]; \tag{30}$$

дифференциальное выражение

$$M[z] = a_nz - (a_{n-1}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)} + \\ + (-1)^n(a_0z)^{(n)} \tag{31}$$

называется *сопряжённым с $L[y]$ дифференциальным выражением* (или оператором), а $\Psi[y, z]$ есть билинейная форма относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, с одной стороны, и $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, с другой стороны, а именно:

$$\Psi[y, z] = y\{a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}\} +$$
$$+ y'\{a_{n-2}z - (a_{n-3}z)' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{n-2}\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ y^{(n-2)}\{a_1z - (a_0z)'\} + y^{(n-1)}\cdot a_0z. \tag{31'}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[z] = 0. \tag{32'}$$

называется *уравнением, сопряжённым с уравнением*

$$L[y] = 0. \tag{32}$$

Соотношение (30) есть тождество не только по x, — оно справедливо при любых функциях y и z. Если мы теперь возьмём в качестве z решение уравнения (32′), $z = \bar{z}$, то формула (30) примет вид:

$$\int \bar{z}L[y]\,dx = \Psi[y, \bar{z}],$$

или, дифференцируя,

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}].$$

Таким образом, поставленная в начале настоящего параграфа задача решена: если умножить данное дифференциальное выражение (29) на любое решение $\bar{z}$ сопряжённого уравнения (32′), то оно становится полной производной от дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка $\Psi[y, \bar{z}]$. Обратно, для того чтобы функция $\bar{z}$ по умножении на $L[y]$ делала его точной производной при любой функции y, необходимо, чтобы $M[\bar{z}] \equiv 0$.

В самом деле, если $\bar{z}$ есть какой-нибудь множитель выражения (29), то имеет место равенство:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi_1[y], \tag{30′}$$

где, как легко видеть, Ψ_1 есть линейное выражение относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$:

$$\Psi_1[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y.$$

С другой стороны, подставляя $\bar{z}$ вместо z в тождество (30) и дифференцируя по x, находим:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}] + yM[\bar{z}]. \tag{30″}$$

Из (30′) и (30″) получаем:

$$\frac{d}{dx}\{\Psi_1[y] - \Psi[y, \bar{z}]\} - yM[\bar{z}] = 0. \tag{30‴}$$

В левой части (30‴) стоит линейное выражение n-го порядка относительно y; так как равенство нулю выполняется тождественно для любой функции y, то коэффициенты при y и всех его производных тождественно равны нулю, иначе (30″) было бы дифференциальным уравнением для y. Из вида (31′) билинейного выражения для Ψ следует:

$$b_{n-1} = a_0\bar{z}, \quad b_{n-2} = a_1\bar{z} - (a_0\bar{z})', \ldots,$$

$$b_0 = a_{n-1}\bar{z} - (a_{n-2}\bar{z})' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0\bar{z})^{(n-1)},$$

т. е. $\Psi_1[y] \equiv \Psi[y, \bar{z}]$, и равенство (30‴) даёт: $M[\bar{z}] \equiv 0$.

Следовательно, мы можем сделать такой вывод:

Для того чтобы функция $\bar{z}$ при всякой функции $y(x)$ обращала произведение $\bar{z}L[y]$ в точную производную, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{z}$ являлось решением сопряжённого уравнения (32′).

Каждое решение сопряжённого уравнения (32′) является множителем уравнения (32′); по умножении на него левая часть уравнения (32)

становится точной производной[1]). Таким образом, уравнение (32) допускает первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = C, \tag{33}$$

который сам является (неоднородным) уравнением порядка $n-1$. Очевидно, если нам дано неоднородное уравнение $L[y]=f(x)$, то та же функция $\bar{z}$ является его множителем, и мы получим первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = \int f(x)\bar{z}\,dx + C.$$

Если имеем линейное уравнение первого порядка в форме $y'+Py=Q$, то уравнение, сопряжённое соответствующему однородному, будет: $Pz-z'=0$; его решение $\bar{z}=e^{\int P\,dx}$ будет множителем данного уравнения, в согласии со сказанным в главе II, § 3, **3**.

Примечание 1. Чтобы левая часть данного дифференциального уравнения сама была точной производной, необходимо и достаточно, чтобы сопряжённое уравнение допускало решение $\bar{z}=1$, т. е. чтобы коэффициент при z в уравнении (32′) был равен нулю. Раскрывая выражение (31) и подсчитывая в нём коэффициент при z, находим условие того, чтобы левая часть уравнения (32) была точной производной, в виде:

$$a_n - \frac{d}{dx}a_{n-1} + \frac{d^2}{dx^2}a_{n-2} - \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}a_0 = 0. \tag{A}$$

Легко видеть, что условие (A) есть частный случай условия (33_n) главы IV для случая, когда уравнение оказывается линейным.

Примечание 2. Оператор $L[y]$ чётного порядка $n=2m$ называется *самосопряжённым*, если он совпадает с сопряжённым оператором: $L[y]\equiv M[y]$. Уравнение $L[y]=0$ называется в таком случае *самосопряжённым уравнением*. Для оператора второго порядка

$$L[y] \equiv a_2y + a_1y' + a_0y''$$

сопряжённый оператор есть

$$M[z] \equiv a_2z - (a_1z)' + (a_0z)'' =$$
$$= (a_2 - a_1' + a_0'')z + (-a_1 + 2a_0')z' + a_0z'';$$

условия самосопряжённости

$$-a_1 + 2a_0' = a_1, \quad a_2 - a_1' + a_0'' = a_2$$

[1]) Новое уравнение, полученное умножением левой части на множитель, приходится рассматривать лишь в тех интервалах, где этот множитель, так же как и a_0, не обращается в нуль (§ 1, **1**).

сводятся к одному первому: $a_1 = a_0'$. Итак, самосопряжённый оператор второго порядка имеет вид: $(a_0 y')' + a_2 y$.

Пример 7. $(1+x)y'' - xy' - y = 2x$. Здесь $a_2 = -1$, $a_1 = -x$, $a_0 = 1 + x$; условие (А) выполняется: $-1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d^2}{dx^2}(1+x) \equiv 0$. Следовательно, левая часть уравнения является точной производной, и оно допускает первый интеграл вида (33), где можно положить $\bar{z} = 1$. Выражение $\Psi[y, z]$ в нашем случае есть $a_1 zy - (a_0 z)' y + a_0 z y'$; подставляя в него значения a_0, a_1 и единицу вместо z, получаем первый интеграл $(1+x)y' + y(-x-1) = x^2 + C_1$, или $y' - y = \frac{x^2 + C_1}{x+1}$; для левой части сопряжённое выражение есть $-z - z'$; решение уравнения $z + z' = 0$, т. е. $\bar{z} = e^{-x}$, может быть принято в качестве множителя нового уравнения, и мы имеем: $e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}\frac{x^2 + C_1}{x+1}$; левая часть этого уравнения — опять полная производная, и общее решение данного уравнения получится в квадратурах:

$$y = e^x \int \frac{e^{-x}(x^2 + C_1)}{x+1}\,dx + C_2 e^x.$$

2. Свойства сопряжённых уравнений. Заметим сначала, что *сопряжённость двух выражений* $L[y]$ и $M[z]$ *есть свойство взаимное*, если $M[z]$ есть дифференциальный оператор, сопряжённый с $L[y]$, то и обратно, $L[y]$ сопряжён с $M[z]$ и определяется по $M[z]$ однозначно. Это следует из симметричности левой части формулы (30) относительно L и M; если $\bar{y}$ есть решение уравнения (32), то из формулы (30) имеем: $\bar{y}M(z) = -\frac{d}{dx}\Psi[\bar{y}, z]$, т. е. любое решение уравнения (32) есть множитель уравнения (32'), а это и показывает, что $L[y]$ есть оператор, сопряжённый с $M[z]$.

Мы уже видели, что знание одного частного решения сопряжённого уравнения даёт возможность без квадратур найти первый интеграл данного уравнения, т. е. понизить его порядок на единицу; зная $p < n$ линейно независимых частных решений уравнения (32'), мы получим p первых интегралов уравнения (32); исключая из них $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(n-p+1)}$ (можно показать, что такое исключение всегда возможно и приводит к одному соотношению), мы получим уравнение порядка $n - p$, т. е. понизим порядок уравнения на p единиц.

Пусть теперь нам известно полное решение уравнения (32), т. е. его фундаментальная система:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

В таком случае $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$. Мы покажем, как найти общее решение сопряжённого уравнения (32'). Заменим в определителе Вронского y_i через неизвестную функцию y и составим линейное дифференциальное выражение $(n-1)$-го порядка относительно y:

$$\theta_i[y] = \frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Очевидно, мы имеем: $\theta_i[y_k]=0$ при $k\neq i$, $\theta_i(y_i)=1$. Следовательно, выражение $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ представляет линейное дифференциальное выражение порядка n, обращающееся в нуль при $y=y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значит, оно только не зависящим от y множителем может отличаться от $L[y]$. Чтобы найти этот множитель, сравним в обоих выражениях $L[y]$ и $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ коэффициенты при $y^{(n)}$. В $L[y]$ этот коэффициент равен a_0, а коэффициент при $y^{(n)}$ в $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ таков же, как коэффициент при $y^{(n-1)}$ в выражении $\theta_i[y]$, а именно, это минор, соответствующий элементу последней строки и i-го столбца определителя Вронского, делённый на самый определитель, т. е.

$$(-1)^{n+i}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}\equiv\frac{\partial \ln W[y_1, \ldots, y_n]}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Итак,

$$\frac{d\theta_i[y]}{dx}=z_iL[y], \tag{34}$$

где

$$z_i=(-1)^{n+i}\frac{1}{a_0}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}. \tag{34'}$$

Выражение z_i, являясь множителем уравнения (32), представляет, по сказанному выше, решение уравнения $M[z]=0$. Давая i значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим *без всяких интеграций* n частных решений уравнения (32′) при помощи фундаментальной системы уравнения (32). Остаётся показать, что полученные выражения линейно независимы. В силу определения функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$, мы имеем:

$$z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+\ldots+z_ny_n^{(n-1)}=\frac{1}{a_0}. \tag{35'}$$

Действительно, левая часть (35′), согласно формулам (34′), равна дроби $\frac{1}{a_0W[y_1, \ldots, y_n]}$, умноженной на разложение определителя $W[y_1, \ldots, y_n]$ по элементам последней строки, т. е. равна $\frac{1}{a_0}$. Далее, если подставить в $W[y_1, \ldots, y_n]$ на место последней его строки $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$ последовательно первую строку, вторую, ... $(n-2)$-ю, то мы получим определитель с двумя равными строками, т. е. 0; деля каждый из этих определителей на $W[y_1, \ldots, y_n]$ и разлагая по элементам последней строки, мы получим, в силу определения (34′) функций z_i, следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} z_1y_1+z_2y_2+\ldots+z_ny_n&=0,\\ z_1y_1'+z_2y_2'+\ldots+z_ny'&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ z_1y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+\ldots+z_ny_n^{(n-2)}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Дифференцируя первое из равенств (35) по x и учитывая второе, получим:

$$z_1'y_1+z_2'y_2+\ldots+z_n'y_n=0. \tag{36'}$$

Дифференцируя второе и принимая во внимание третье, дифференцируя третье и принимая во внимание четвёртое и т. д. и, наконец, дифференцируя последнее из равенств (35) и принимая во внимание (35′), получим:

$$\left.\begin{aligned} z_1'y_1' + z_2'y_2' + \ldots + z_n'y_n' &= 0,\\ z_1'y_1'' + z_2'y_2'' + \ldots + z_n'y_n'' &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ z_1'y_1^{(n-2)} + z_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + z_n'y_n^{(n-2)} &= -\frac{1}{a_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Аналогично, дифференцируя каждое из равенств (36′) и (36) и принимая во внимание следующее, получим группу:

$$z_1''y_1^{(i)} + z_2''y_2^{(i)} + \ldots + z_n''y_n^{(i)} = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-4),$$

$$z_1''y_1^{(n-3)} + z_2''y_2^{(n-3)} + \ldots + z_n''y_n^{(n-3)} = \frac{1}{a_0}.$$

Продолжая те же операции, получим в итоге следующие равенства:

$$z_1^{(i)}y_1^{(k)} + z_2^{(i)}y_2^{(k)} + \ldots + z_n^{(i)}y_n^{(k)} = \begin{cases} 0, \text{ если } i+k<n-1,\\ \dfrac{(-1)^i}{a_0}, \text{ если } i+k=n-1. \end{cases} \qquad (37)$$

Составим теперь произведение определителей $\Delta = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ и $\Delta_1 = W[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ по правилу «строка на строку». Из соотношений (37) следует, что мы получим определитель, у которого на побочной диагонали стоят элементы $\frac{(-1)^n}{a_0}, \frac{(-1)^{n-1}}{a_0}, \ldots, \frac{1}{a_0}$, а выше этой диагонали — нули. Отсюда имеем: $\Delta\Delta_1 = \frac{1}{a_0^n}$; таким образом, $\Delta_1 \neq 0$, и, значит, функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$ действительно образуют фундаментальную систему сопряжённого уравнения (32′). Итак, *из фундаментальной системы данного уравнения* по формулам (34′) *без всяких интеграций может быть получена фундаментальная система сопряжённого уравнения.* Решения z_i уравнения (32′), даваемые формулами (34′), называются *решениями, сопряжёнными с* y_i. Таким образом, *интегрирование данного уравнения и уравнения сопряжённого суть задачи эквивалентные.*

3. Формула Коши для неоднородного уравнения. Функция Грина. Пусть в уравнении (1′) коэффициенты и правая часть являются непрерывными функциями x в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Считая фундаментальную систему однородного уравнения известною, составим решение $K(x, \xi)$ однородного уравнения, зависящее от параметра ξ, а именно, решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$K(\xi, \xi) = 0, \quad K_x'(\xi, \xi) = 0, \ \ldots, K_x^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \ K_x^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1. \qquad (38)$$

Тогда частное решение уравнения (1) даётся формулой:

$$Y(x) = \int_a^x K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \qquad (38')$$

В самом деле, дифференцируем последовательно равенство (38′) n раз по x; принимая во внимание условия (38), находим:

$$Y'(x) = \int_a^x K'_x(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad \ldots, \quad Y^{(n-1)}(x) = \int_a^x K_x^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$Y^{(n)}(x) = \int_a^x K_x^{(n)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (1′), получаем:

$$\int_a^x \left\{ K_x^{(n)}(x, \xi) + p_1(x) K_x^{(n-1)}(x, \xi) + \ldots + p_n(x) K(x, \xi) \right\} f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Но поскольку $K(x, \xi)$, как функция x, есть решение уравнения (3′) при любом ξ, выражение в фигурных скобках равно нулю, и подстановка выражения (38′) в уравнение (1′) даёт тождество. Наше утверждение доказано.

Заметим, что полученное решение удовлетворяет начальным условиям:

$$Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Формуле (38′) можно придать другой вид. Для этого определим функцию Грина от двух переменных x, ξ (аргумента и параметра):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ K(x, \xi), & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Легко видеть, что G, как функция x, удовлетворяет однородному уравнению (3′), всюду кроме значения $x = \xi$, где она остаётся непрерывной вместе с $n-2$ производными, тогда как производная $(n-1)$-го порядка имеет в этой точке скачок:

$$G_x^{(n-1)}(\xi + 0, \xi) - G_x^{(n-1)}(\xi - 0, \xi) = 1.$$

С помощью функции Грина решение (38) уравнения (1′) может быть написано в форме определённого интеграла:

$$Y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Исследуем функцию Грина в её зависимости от параметра ξ. Для этого построим функцию Грина $G_1(x, \xi)$ уравнения (31), сопряжённого с уравнением (1′), в которой роли концов a и b переменены (коэффициент a предполагается равным 1). Именно, строим решение $K_1(x, \xi)$ уравнения (31), удовлетворяющее условиям:

$$K_1(\xi, \xi) = 0, \ K'_{1x}(\xi, \xi) = 0, \ \ldots, \ K_{1x}^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \ K_{1x}^{(n-1)}(\xi, \xi) = -1,$$

и полагаем:

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} K_1(x, \xi), & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ 0, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Далее применяем формулу (30), в которой положено $y = G(x, \xi)$, $z = G_1(x, \eta)$. Замечая, что в интервалах, не заключающих точек ξ и η, функ-

ции G и G_1 от x удовлетворяют соответствующим линейным уравнениям, в левой части мы имеем 0, в правой части все входящие функции непрерывны, кроме $G_x^{(n-1)}$, $G_{1x}^{(n-1)}$, претерпевающих разрыв соответственно при $x=\xi$ и при $x=\eta$. Поэтому имеем, полагая для определённости $\xi<\eta$:

$$0=\int_a^b [G_1L(G)-GM(G_1)]\,dx=$$
$$=\Psi[G,G_1]\Big|_{x=a}^{x=\xi-0}+\Psi[G,G_1]\Big|_{x=\xi+0}^{x=\eta-0}+\Psi[G,G_1]\Big|_{x=\eta+0}^{b}.$$

Так как $G(x,\xi)$ со всеми производными обращается в нуль при $x=a$, а при $x=b$ то же имеет место для $G_1(x,\eta)$, то имеем:

$$\Psi[G,G_1]\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0}+\Psi[G,G_1]\Big|_{x=\eta+0}^{x=\eta-0}=0.$$

Принимая во внимание формулу (31′) для Ψ, а также непрерывность при $x=\xi$ и $x=\eta$ всех производных до порядка $n-2$ включительно, мы из последнего равенства получаем, оставляя лишь члены, где есть разрыв:

$$G_1G_x^{(n-1)}\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}+(-1)^{n-1}G_{1x}^{(n-1)}G\Big|_{x=\eta+0}^{x=\eta-0}=0,$$

или, в силу непрерывности G и G_1 при $x=\xi$ и при $x=\eta$,

$$G(\eta,\xi)=(-1)^n\cdot G_1(\xi,\eta),$$

т. е. $G(x,\xi)$ как функция ξ есть функция Грина сопряжённого уравнения с переменёнными ролями концов, в которой x является параметром.

Пример 8. Найти решение Y уравнения $y''+p^2y=f(x)$, удовлетворяющее условиям $Y(0)=Y'(0)=0$ (p — постоянное).

Функция $K(x,\xi)$, удовлетворяющая условиям $K(\xi,\xi)=0$, $K'_x(\xi,\xi)=1$, здесь будет $\sin p(x-\xi)$. Итак, искомое решение есть

$$Y(x)=\int_0^x \sin p(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

ЗАДАЧИ.

143. Каким соотношением связаны коэффициенты уравнения $y''+p_1y'+$ $+p_2y=0$, если два частных решения y_1 и y_2 удовлетворяют соотношению $y_1y_2=1$? Найти при выполнении этого условия общее решение.

144. Какая подстановка приводит сразу к уравнению $(n-2)$-го порядка, если известны два частных решения y_1 и y_2 линейного уравнения n-го порядка?

145. Найти общее решение уравнения $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, зная, что его частное решение имеет вид e^{mx}, где m — постоянное.

146. Проинтегрировать уравнение $\sin^2 x\cdot y''+\sin x\cdot\cos x\cdot y'=y$.

ГЛАВА VI.

ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В теории дифференциальных уравнений линейные уравнения являются одним из наиболее интересных отделов. Это обусловливается как тем, что они относятся к типу уравнений с хорошо разработанной общей теорией, так и широкими возможностями их приложений к физике, механике и т. д. Линейные уравнения содержат несколько классов, для которых до конца решается задача о представлении общего решения при помощи элементарных функций. В тех же случаях, когда такая элементарная интеграция невозможна, часто оказывается необходимым — ввиду важности данного уравнения, теоретической или прикладной — исследовать свойства его решений, вводя последние в математический обиход в качестве новых трансцендентных функций. Для линейных уравнений такое исследование оказывается значительно проще, чем для нелинейных, так как нам не приходится заботиться об изучении зависимости решения от произвольных постоянных — оно известно из общей теории. Таким образом, для изучения, например, общего решения линейного уравнения второго порядка достаточно изучить две функции от одного независимого переменного x — два частных решения.

Настоящая глава посвящена тем типам уравнений, для которых задачи интеграции доводятся до конца, а также изложению некоторых свойств линейных уравнений второго порядка.

§ 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводимые к ним.

1. Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение, линейное однородное n-го порядка с коэффициентом при старшей производной, равным единице:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

или

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (1)$$

В этом параграфе мы будем считать коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n постоянными (действительными) числами. Мы покажем, что в таком случае *интеграция уравнения* (1) *всегда возможна в элементарных функциях и сводится* даже не к квадратурам, а *к алгебраическим операциям.*

Заметим, что, в силу общих свойств линейных уравнений, нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему, т. е. линейно независимых.

Постараемся выяснить, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (1) в тождество. Для этого нужно, чтобы по подстановке решения в левую часть уравнения там оказались подобные члены, которые в сумме могли бы дать нуль. Из дифференциального исчисления мы знаем функцию, которая подобна со всеми своими производными в смысле элементарной алгебры; этой функцией является e^{kx}, где k — постоянное. Итак, попытаемся удовлетворить нашему уравнению, полагая

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

где k — постоянное, которое мы можем выбирать произвольно. Дифференцируя по x выражение (2) один раз, два раза, ..., n раз, мы получим следующие функции:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx},\ \ldots,\ y^{(n-1)} = k^{n-1}e^{kx},\ y^{(n)} = k^ne^{kx}. \tag{3}$$

Внося выражения (2) и (3) в левую часть уравнения (1), которую мы обозначим символом оператора L, мы получим:

$$L[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n). \tag{4}$$

В равенстве (4), в правой части, в скобках стоит многочлен n-й степени относительно k с постоянными коэффициентами. Он называется *характеристическим многочленом*, соответствующим оператору L; обозначим его через $F(k)$:

$$F(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n.$$

В этих обозначениях равенство (4) кратко запишется так:

$$L[e^{kx}] = e^{kx}F(k). \tag{4'}$$

Заметим, что характеристический многочлен получается из оператора $L[y]$, если производные различных порядков в этом последнем заменить равными степенями величины k. Если выражение (2) есть решение дифференциального уравнения (1), то выражение (4) должно тождественно обращаться в нуль. Но множитель $e^{kx} \neq 0$; следовательно, мы должны положить:

$$F(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) есть алгебраическое уравнение с неизвестным k. Оно

называется *характеристическим уравнением. Если мы в качестве постоянного* k *в выражении* (2) *возьмём корень* k_1 *характеристического уравнения* (5), *то выражение* (4) будет тождественно равно нулю, т. е. $e^{k_1 x}$ *будет являться решением дифференциального уравнения* (1).

Но характеристическое уравнение есть уравнение n-й степени; следовательно, оно имеет n корней. В этом разделе мы рассмотрим случай, когда все эти корни различны. Обозначим их через

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n. \tag{6}$$

Каждому из корней (6) соответствует частное решение дифференциального уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x},\quad y_2 = e^{k_2 x},\quad \ldots,\quad y_n = e^{k_n x}. \tag{7}$$

Докажем, что *эти решения образуют фундаментальную систему*; для этого составим определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть известный определитель Вандермонда; он равен

$$\begin{aligned} &(k_1 - k_2)(k_1 - k_3) \ldots (k_1 - k_n) \times \\ &\times (k_2 - k_3) \ldots (k_2 - k_n) \times \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\times (k_{n-1} - k_n) \end{aligned}$$

и, следовательно, не обращается в нуль, если все корни уравнения (5) различны. Таким образом, система решений (7) является фундаментальной, и общее решение уравнения (1) будет:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}, \tag{8}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 1. $y'' - y = 0$. Характеристическое уравнение есть $k^2 - 1 = 0$. Его корни различны и равны соответственно $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Отсюда следует, что соответствующие частные решения будут таковы: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. А тогда общее решение есть $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Рассмотрим теперь случай комплексных корней. Формально выражение (8) до конца решает поставленную нами задачу интегрирования линейного уравнения с постоянными коэффициентами в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения. Но мы в этой главе, как и во всём курсе, рассматриваем уравнения только с действительными коэффициентами; между тем уравнение (5) может допускать также комплексные корни. Заметим (этим замечанием мы вскоре воспользуемся), что, в силу того, что коэффициенты уравнений (5) действительны, комплексные корни входят попарно сопряжёнными, т. е. комплексному корню $k_1 = \alpha + \beta i$ соответствует другой корень $k_2 = \alpha - \beta i$. Если мы напишем решение y_1, соответствующее корню k_1, то оно будет иметь вид:

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i) x}. \tag{9}$$

Выражение (9) является, вообще говоря, комплексным числом; мы имеем дело с комплексной функцией действительного переменного x.

Всякая комплексная функция $f(x)$ действительного переменного может быть представлена в виде:

$$f(x) = u(x) + iv(x), \tag{10}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — две действительные функции действительного переменного; и, обратно, две произвольные действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ дают по формуле (10) комплексную функцию действительного переменного.

Докажем следующую лемму:

Лемма. *Если мы имеем комплексное решение вида* (10) *линейного дифференциального уравнения с действительными (не обязательно постоянными) коэффициентами*

$$L[y] = 0, \tag{11}$$

то функции $u(x)$ и $v(x)$ в отдельности являются решениями (действительными) уравнения (11).

В самом деле, из свойств линейного дифференциального оператора $L[y]$ следует:

$$L[u(x)+iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)]. \quad (12)$$

По условию леммы, выражение (12) тождественно равно нулю, но оба выражения $L[u]$ и $L[v]$ суть действительные функции от x; тождественное равенство нулю выражения (12) влечёт за собой, таким образом, два тождества:

$$L[u(x)] = 0, \qquad L[v(x)] = 0,$$

что и доказывает лемму.

Воспользуемся этой леммой для преобразования решения (9). Отделяя в нём действительную часть от мнимой по формуле Эйлера, получаем:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Согласно лемме, мы получаем: *комплексному корню* $k_1 = \alpha + \beta i$ *соответствуют два действительных решения уравнения* (1)[1]):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \quad (13)$$

Заметим, что сопряжённому корню $k_2 = \alpha - \beta i$ соответствует комплексное решение

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x},$$

которое, очевидно, может быть написано в виде:

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

т. е. является (комплексной) линейной комбинацией тех же действительных решений (13). Таким образом, мы можем сказать, что *паре сопряжённых комплексных корней характеристического уравнения* (5) *соответствуют два действительных частных решения уравнения* (1) *вида* (13).

Пример 2. Уравнение *свободного гармонического колебания* имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0 \qquad (a \text{ — постоянное}).$$

Следовательно, характеристическое уравнение будет: $k^2 + a^2 = 0$, а его корни будут: $k = \pm ai$. Мы находим отсюда, что частные комплексные решения будут иметь вид: $x_1 = e^{iat}$, $x_2 = e^{-iat}$, в то время как частные решения действительные будут: $x_1 = \cos at$, $x_2 = \sin at$.

Общее решение: $x = C_1\cos at + C_2\sin at$. Для большей наглядности полезно ввести новые постоянные, отказавшись от простей-

[1]) Легко убедиться в том, что эти решения линейно независимы.

шего, с теоретической точки зрения, вида, когда общее решение зависит от них линейно. Именно, введём постоянные A и δ, связанные с C_1 и C_2 соотношениями:

$$C_1 = A\sin\delta, \quad C_2 = A\cos\delta;$$

A и δ однозначно определяются, если мы введём добавочные ограничения: $A > 0$ (равенство нулю означало бы тривиальное решение), $-\pi < \delta \leqslant \pi$. Тогда решение представится в виде:

$$x = A\sin(at + \delta).$$

Геометрически ясно, что интегральные кривые в плоскости xOt представляют семейство синусоид. Заданное в уравнении постоянное a называется *частотой* колебания. *Период* колебания T получается при возрастании аргумента sin на 2π, т. е. при возрастании t на $\frac{2\pi}{a}$, $T = \frac{2\pi}{a}$. Число колебаний в единицу времени $\nu = \frac{a}{2\pi}$; оно отличается от частоты множителем $\frac{1}{2\pi}$. Постоянная интеграции A характеризует наибольшее по абсолютной величине значение функции x — *амплитуду* колебания; наконец, постоянная интеграции δ есть *начальная фаза* (фазой, вообще, называется значение аргумента функции $\sin x$ в колебательном движении).

Пример 3. Уравнение *свободных упругих колебаний при наличии сопротивления* приводится к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \quad (n > 0).$$

Рассмотрим случай, когда n — малое число, во всяком случае $n < a$. Тогда корни характеристического уравнения будут:

$$k_1 = -n + i\sqrt{a^2 - n^2},$$

$$k_2 = -n - i\sqrt{a^2 - n^2},$$

соответствующие действительные решения:

$$x_1 = e^{-nt}\cos\sqrt{a^2 - n^2}\,t,$$

$$x_2 = e^{-nt}\sin\sqrt{a^2 - n^2}\,t,$$

и общее решение будет:

$$x = e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{a^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{a^2 - n^2}\,t),$$

или

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{a^2 - n^2}\,t + \alpha)$$

(A и α — произвольные постоянные).

Можно рассматривать это движение, как колебательное с частотой $\sqrt{a^2-n^2}=a\sqrt{1-\frac{n^2}{a^2}}$; эта частота, в случае если n мало по отношению к a, весьма мало отличается от частоты a, которой обладало бы движение при отсутствии сопротивления; α попрежнему есть начальная фаза; но в качестве амплитуды приходится рассматривать функцию от t, Ae^{-nt}.

Эта функция убывает со временем, т. е. мы имеем дело с *затухающим колебанием.*

В течение одного колебания, т. е. полупериода $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-n^2}}$ первоначальная амплитуда получает множитель $e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{a^2-n^2}}}$; логарифм этого выражения с обратным знаком, т. е. $\frac{n\pi}{\sqrt{a^2-n^2}}$, называется *логарифмическим декрементом* колебания.

Пример 4. $y'''+y=0$. Характеристическое уравнение $k^3+1=0$, его корни $k_1=-1$, $k_2=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней характеристического уравнения. Если среди корней уравнения (5) существуют кратные, то количество различных в ряду (6) чисел будет $<n$, и, соответственно, число линейно независимых частных решений вида (7) будет меньше n; этих решений недостаточно для получения общего решения. Для получения недостающих решений изучим выражение линейного оператора L от произведения двух функций uv.

По формуле Лейбница имеем:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)},$$

$$(uv)^{(n-1)}=u^{(n-1)}v+\binom{n-1}{1}u^{(n-2)}v'+\binom{n-1}{2}u^{(n-3)}v''+\ldots+uv^{(n-1)},$$

. . . .

. . . .

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)'=u'v+uv',$$

$$uv=uv.$$

Умножая первую строку на 1, вторую на $a_1, \ldots$, последнюю на a_n и складывая, получим:

$$L[uv] = vL[u] + \frac{v'}{1!}L_1[u] + \frac{v''}{2!}L_2[u] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)!}L_{n-1}[u] + \frac{v^{(n)}}{n!}L_n[u]. \qquad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
L\,[y] &= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_n y,\\
L_1[y] &= ny^{(n-1)} + (n-1)a_1 y^{(n-2)} + \ldots + 2a_{n-2}y' + a_{n-1}y,\\
L_2[y] &= n(n-1)y^{(n-2)} + \\
&\quad + (n-1)(n-2)a_1 y^{(n-3)} + \ldots + 2\cdot 1\cdot a_{n-2}y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_{n-1}[y] &= n(n-1)\ldots 2y' + (n-1)(n-2)\ldots 1\cdot a_1 y,\\
L_n[y] &= n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot y.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Операторы $L_r[y]$, $r = 1, 2, \ldots, n$ составлены из $L[y]$ по правилу, аналогичному правилу дифференцирования многочлена, только роль показателей играют указатели порядка производной.

Формула (14) применима к любому линейному оператору. *Если, в частности, коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *суть постоянные, то каждому оператору* $L_r[y]$ *соответствует характеристический многочлен* $F_r(k)$, причём легко видеть, что $F_r(k)$ есть r-я производная по k многочлена $F(k)$, соответствующего оператору $L[y]$:

$$F_r(k) = F^{(r)}(k). \qquad (16)$$

Вычислим теперь выражение (14), если $u = e^{kx}$, $v = x^m$, где m — целое неотрицательное число.

Мы получим:

$$L[x^m e^{kx}] = x^m L[e^{kx}] + \frac{m}{1}x^{m-1}L_1[e^{kx}] + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}L_2[e^{kx}] + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m}{m-1}xL_{m-1}[e^{kx}] + L_m[e^{kx}],$$

или, так как, в силу формул (4′) и (16), мы имеем:

$$L_r[e^{kx}] = e^{kx}F^{(r)}(k),$$

получим:

$$L[x^m e^{kx}] = e^{kx}\left\{x^m F(k) + \binom{m}{1}x^{m-1}F'(k) + \binom{m}{2}x^{m-2}F''(k) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{m}{m-1}xF^{(m-1)}(k) + F^{(m)}(k)\right\}. \qquad (17)$$

Пусть теперь k_1 есть корень характеристического уравнения (5) кратности m_1; тогда, как известно,

$$F(k_1)=0,\ F'(k_1)=0,\ \ldots,\ F^{(m_1-1)}(k_1)=0,\ \neq F^{(m_1)}(k_1)\neq 0.$$

Если в выражении (17) взять показатель m при x меньшим, чем m_1, то все члены в скобке правой части обратятся в нуль; следовательно, мы получаем m_1 частных решений дифференциального уравнения (1), соответствующих корню k_1:

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ x^2e^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x}. \tag{18}$$

Аналогично, если имеются другие корни характеристического уравнения, k_2 кратности $m_2, \ldots, k_p$ кратности m_p, $m_i \geqslant 1$, причём $m_1+m_2+\ldots+m_p=n$, и все k_r уже различны[1]), то им будут соответствовать частные решения:

$$\left.\begin{array}{l} e^{k_2x},\ \ xe^{k_2x},\ \ \ldots,\ \ x^{m_2-1}\,e^{k_2x}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e^{k_px},\ \ xe^{k_px},\ \ \ldots,\ \ x^{m_p-1}\,e^{k_px}. \end{array}\right\} \tag{18'}$$

Совокупность решений (18) и (18′) даст в общем случае кратных корней n частных решений. Остаётся доказать, что они образуют фундаментальную систему.

Допустим, что между этими решениями существует тождественно линейное соотношение:

$$\sum_{r=1}^{p}\left(A_0^{(r)}+A_1^{(r)}x+\ldots+A_{m_r-1}^{(r)}x^{m_r-1}\right)e^{k_rx}\equiv\sum_{r=1}^{p}P_r(x)\,e^{k_rx}=0, \tag{19}$$

где коэффициенты $A_j^{(r)}$ — постоянные. Без ограничения общности можно предположить, что в многочлене $P_p(x)$ по крайней мере один коэффициент отличен от нуля. Разделим обе части этого соотношения на e^{k_1x}:

$$P_1(x)+\sum_{r=2}^{p}P_r(x)\,e^{(k_r-k_1)\,x}=0.$$

Дифференцируя последнее (предполагаемое) тождество m_1 раз по x, мы вместо первого многочлена получим нуль, а все многочлены, стоящие множителями при показательных функциях, заменятся новыми многочленами т е х ж е с т е п е н е й, и мы получим новое тождество:

$$\sum_{r=2}^{p}Q_r(x)\,e^{(k_r-k_1)x}=0. \tag{19'}$$

---

[1]) Конечно, некоторые корни k_r могут быть простыми, тогда соответствующее число $m_r=1$.

Очевидно, что $Q_p(x)$ не равно нулю тождественно. Сумма (19′) содержит уже $p-1$ слагаемых; продолжая тот же процесс, мы придём, наконец, к тождеству:

$$R_p(x)\, e^{(k_p - k_{p-1})x} = 0. \qquad (19'')$$

Но тождество (19″) невозможно, так как $e^{(k_p - k_{p-1})x} \neq 0$, а многочлен $R_p(x)$, будучи той же степени, что $P_p(x)$, имеет по крайней мере один коэффициент отличным от нуля и не тождественно равен нулю.

Примечание. То же рассуждение может быть применено и к случаю различных корней; тогда все многочлены P_r имеют нулевую степень; после деления обеих частей равенства (19) на $e^{k_1 x}$ достаточно одного дифференцирования, чтобы получить равенство вида (19′).

Доказав линейную независимость частных решений (18) и (18′), мы можем написать общее решение уравнения (1) в случае кратных корней в виде:

$$y = \sum_{r=1}^{p} G_r(x)\, e^{k_r x}, \qquad (20)$$

где $G_r(x)$ есть многочлен степени $m_r - 1$ с произвольными коэффициентами. Число произвольных постоянных в выражении (20) равно

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

т. е. порядку уравнения, как и должно быть.

В случае комплексных кратных корней характеристического уравнения выражение (20) неудобно, так как оно окажется комплексной функцией действительного переменного x. Заметим, что комплексные корни войдут попарно сопряжёнными с одинаковой кратностью. Если корень $k_1 = \alpha + \beta i$ $[\beta \neq 0]$ имеет кратность m_1, то сопряжённый корень $k_2 = \alpha - \beta i$ имеет ту же кратность. Соответствующая корню k_1 совокупность решений (18) будет:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad xe^{(\alpha+\beta i)x}, \ \ldots, \ x^{m_1-1}e^{(\alpha+\beta i)x}. \qquad (18'')$$

Пользуясь леммой, доказанной на стр. 217, мы отделим в выражениях (18″) действительные части от мнимых и получим, таким образом, $2m_1$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ldots, \ x^{m_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots, \ x^{m_1-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Подобные решения могут быть построены для любого из остальных корней. Таким образом, мы всегда получим действительные решения в числе, равном порядку уравнения.

Пример 5. $y''' - y'' - y' + y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$, его корни: $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Общее решение

$$y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}.$$

Пример 6. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$, или $(k^2 + 4)^2 = 0$. Его корни:

$$k_1 = k_2 = 2i; \quad k_3 = k_4 = -2i.$$

Общее решение:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

ЗАДАЧИ.

Найти общее решение уравнений:

147. $y^{IV} - 2y'' = 0$.
148. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
149. $y^{IV} + 4y = 0$.
150. $y^{IV} - y = 0$.
151. $2y'' + y' - y = 0$.
152. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L[y] = V(x), \tag{21}$$

то, так как мы всегда умеем решить соответствующее однородное уравнение, изложенный в главе V метод вариации постоянных, во всяком случае, позволяет найти квадратурами частное решение, а следовательно, и написать общее решение. Мы в этом параграфе остановимся главным образом на тех случаях, когда частное решение находится без квадратур.

Начнём с одного замечания, относящегося к любому линейному уравнению с правой частью.

Если имеем уравнение

$$L[y] = V_1(x) + V_2(x),$$

то, обозначая через Y_1 и Y_2 соответственно частные решения уравнений:

$$L[y] = V_1(x), \quad L[y] = V_2(x),$$

мы получим его частное решение в виде:

$$Y = Y_1 + Y_2.$$

В самом деле, мы имеем:

$$L[Y_1+Y_2]=L[Y_1]+L[Y_2].$$

Но, по условию,

$$L[Y_1]\equiv V_1(x), \quad L[Y_2]\equiv V_2(x),$$

откуда

$$L[Y_1+Y_2]\equiv V_1(x)+V_2(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы укажем способ нахождения частных решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$L[y]=\sum_{r=1}^{k} P_r(x)\,e^{\alpha_r x} \quad [P_r(x) \text{ — многочлены}]$$

без квадратур, одними рациональными операциями.

На основании предыдущего замечания, достаточно уметь находить частное решение уравнения вида

$$L[y]=P_m(x)\,e^{\alpha x}, \tag{22}$$

где $P_m(x)=p_m x^m+\ldots+p_0$ есть многочлен степени $m\geqslant 0$.

Нам придётся рассмотреть два случая.

1) α не является корнем характеристического уравнения, $F(\alpha)\neq 0$. Мы докажем, что в этом случае существует частное решение того же вида, что и правая часть, именно:

$$Y=Q_m(x)\,e^{\alpha x}, \tag{23}$$

где

$$Q_m(x)=q_m x^m+q_{m-1}x^{m-1}+\ldots+q_0.$$

Рассматривая коэффициенты $q_m, q_{m-1}, \ldots, q_0$, как неизвестные, покажем, что их можно определить так, чтобы выполнялось следующее тождество по x:

$$L[Q_m(x)\,e^{\alpha x}]=P_m(x)\,e^{\alpha x},$$

или

$$e^{-\alpha x}L\,[Q_m(x)\,e^{\alpha x}]=P_m(x). \tag{22'}$$

Мы можем вычислить левую часть, применяя формулу (17); мы найдём, обозначая попрежнему характеристический многочлен через $F(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&e^{-\alpha x}L\,[Q_m(x)\,e^{\alpha x}]=\\
&=q_m\left\{x^m F(\alpha)+\binom{m}{1}x^{m-1}F'(\alpha)+\binom{m}{2}x^{m-2}F''(\alpha)+\ldots+F^{(m)}(\alpha)\right\}+\\
&\quad+q_{m-1}\left\{x^{m-1}F(\alpha)+\binom{m-1}{1}x^{m-2}F'(\alpha)+\ldots+F^{(m-1)}(\alpha)\right\}+\ldots\\
&\quad\ldots+q_1\{xF(\alpha)+F'(\alpha)\}+q_0F(\alpha).
\end{aligned} \tag{24}$$

Приравнивая выражение (24) многочлену $P_m(x)$ и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными $q_0, q_1, \ldots, q_m$:

$$\left.\begin{aligned}
q_m F(\alpha) &= p_m, \\
q_{m-1}F(\alpha) + q_m \binom{m}{1} F'(\alpha) &= p_{m-1}, \\
q_{m-2}F(\alpha) + q_{m-1}\binom{m-1}{1} F'(\alpha) + q_m \binom{m}{2} F''(\alpha) &= p_{m-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
q_{m-r}F(\alpha) + q_{m-r+1}\binom{m-r+1}{1} F'(\alpha) + & \\
+ q_{m-r+2}\binom{m-r+2}{2} F''(\alpha) + \ldots + q_m \binom{m}{r} F^{(r)}(\alpha) &= p_{m-r}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
q_0F(\alpha) + q_1F'(\alpha) + q_2F''(\alpha) + q_3F'''(\alpha) + \ldots + q_m F^{(m)}(\alpha) &= p_0.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Так как, по условию, α не является корнем характеристического уравнения, то $F(\alpha) \neq 0$. Система (25) даёт возможность последовательно вычислить $q_m, q_{m-1}, \ldots, q_0$:

$$q_m = \frac{p_m}{F(\alpha)},$$

$$q_{m-1} = \frac{1}{F(\alpha)}\left(p_{m-1} - q_m \binom{m}{1} F'(\alpha)\right) =$$

$$= \frac{p_{m-1}}{F(\alpha)} - \binom{m}{1} \frac{p_m}{[F(\alpha)]^2} F'(\alpha) \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, мы находим искомое частное решение (23) (разрешимость системы (25) относительно $q_0, q_1, \ldots, q_m$ можно сразу усмотреть из того, что её определитель равен $[F(\alpha)]^{m+1} \neq 0$).

2) Пусть теперь α является корнем характеристического уравнения кратности $r \geqslant 1$. Тогда $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Формула (17) показывает, что в этом случае $L[e^{\alpha x}x^m]$ есть произведение $e^{\alpha x}$ на многочлен степени $m-r$. Чтобы получить в результате подстановки в левую часть уравнения $e^{\alpha x}$, умноженное на многочлен степени m, естественно искать частное решение в этом случае в виде:

$$Y = x^r Q_m(x) e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(q_m x^{m+r} + q_{m-1}x^{m+r-1} + \ldots + q_0 x^r). \quad (26)$$

Подставляя это выражение в уравнение (22) и требуя, чтобы (26) было решением уравнения, мы приходим к условию:

$$e^{-\alpha x} L[x^r Q_m(x) e^{\alpha x}] = P_m(x). \quad (26')$$

Опять вычисляем левую часть, пользуясь формулой (17) и помня, что $F(\alpha)=F'(\alpha)=\ldots=F^{(r-1)}(\alpha)=0$, $F^{(r)}(\alpha)\neq 0$. Имеем:

$$e^{-\alpha x}L[x^r Q_m(x)e^{\alpha x}]=$$
$$=q_m\left\{\binom{m+r}{r}x^m F^{(r)}(\alpha)+\binom{m+r}{r+1}x^{m-1}F^{(r+1)}(\alpha)+\ldots+\right.$$
$$\left.+F^{(m+r)}(\alpha)\right\}+q_{m-1}\left\{\binom{m+r-1}{r}x^{m-1}F^{(r)}(\alpha)+\right.$$
$$\left.+\binom{m+r-1}{r+1}x^{m-2}F^{(r+1)}(\alpha)+\ldots+F^{(m+r-1)}(\alpha)\right\}+\ldots+$$
$$+q_1\left\{\binom{r+1}{r}xF^{(r)}(\alpha)+F^{(r+1)}(\alpha)\right\}+q_0F^{(r)}(\alpha). \qquad (27)$$

Подставляя выражение (27) в равенство (26′) и приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (26′), опять получаем систему $m+1$ уравнений для определения $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$:

$$\left.\begin{aligned}
&\binom{m+r}{r}F^{(r)}(\alpha)\,q_m=p_m,\\
&\binom{m+r-1}{r}F^{(r)}(\alpha)\,q_{m-1}+\binom{m+r}{r+1}F^{(r+1)}(\alpha)\,q_m=p_{m-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\binom{m+r-l}{r}F^{(r)}(\alpha)\,q_{m-l}+\binom{m+r-l+1}{r+1}F^{(r+1)}(\alpha)\,q_{m-l+1}+\\
&\qquad+\ldots+\binom{m+r}{r+l}F^{(r+l)}(\alpha)\,q_m=p_{m-l},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F^{(r)}(\alpha)\,q_0+F^{(r+1)}(\alpha)\,q_1+\ldots+F^{(r+m)}(\alpha)\,q_m=p_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Определитель системы (28) равен

$$\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r}\ldots\binom{r}{r}[F^{(r)}(\alpha)]^{m+1}\neq 0,$$

поэтому все неизвестные q_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ определяются однозначно, и мы получаем решение вида (26).

Итак, мы приходим к следующему результату: *частное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью вида $P_m(x)e^{\alpha x}$ может быть найдено в виде $x^rQ_m(x)e^{\alpha x}$, где $r\geqslant 0$ есть кратность корня α характеристического уравнения, Q_m есть многочлен той же степени, что P_m.*

На практике для нахождения частного решения обыкновенно пишут его в форме (23) или (26) с неопределёнными коэффициентами у многочлена $Q_m(x)$. Подставляя это выражение частного решения в заданное уравнение, сокращая на $e^{\alpha x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают систему линейных уравнений

для этих коэффициентов. По доказанному, эта система всегда имеет определённые решения.

Пример 7. Решить уравнение $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$. Согласно сказанному в начале этого n° (стр. 224), мы можем искать частные решения двух уравнений: $y''' + y'' = x^2 + 1$ и $y''' + y'' = 3xe^x$. Характеристическое уравнение, очевидно, имеет вид: $k^3 + k^2 = 0$, его корни: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$. Рассмотрим сначала первое уравнение; в правой части нет показательного множителя, следовательно, $\alpha = 0$; но нуль есть двукратный корень характеристического уравнения; поэтому мы, согласно изложенному выше, должны искать частное решение в виде $Y_1 = x^2 Q_2(x) = a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x^2$. Находим:

$$Y_1'' = 12 a_2 x^2 + 6a_1 x + 2a_0, \quad Y_1''' = 24 a_2 x + 6a_1.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$24 a_2 x + 6a_1 + 12a_2 x^2 + 6a_1 x + 2a_0 = x^2 + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, находим систему уравнений: $12a_2 = 1$, $24a_2 + 6a_1 = 0$, $6a_1 + 2a_0 = 1$. Из неё определяем коэффициенты: $a_2 = \frac{1}{12}$, $a = -\frac{1}{3}$, $a_0 = \frac{3}{2}$; следовательно, $Y_1 = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Переходим ко второму уравнению; здесь $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Ищем частное решение в виде $Y_2 = e^x(b_1 x + b_0)$. Находим: $Y_2' = e^x(b_1 x + b_0 + b_1)$, $Y_2'' = e^x(b_1 x + b_0 + 2b_1)$, $Y_2''' = e^x(b_1 x + b_0 + 3b_1)$; подставляя в уравнение и сокращая на e^x, получаем: $b_1 x + b_0 + 3b_1 + b_1 x + b_0 + 2b_1 = 3x$. Приравниваем коэффициенты: $2b_1 = 3$, $2b_0 + 5b_1 = 0$, откуда $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_0 = -\frac{15}{4}$. Искомое частное решение: $Y_2 = e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)$. Общее решение данного уравнения есть

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right);$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Если правая часть уравнения (21) имеет вид:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \cdot P_m(x) \quad \text{или} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x \cdot P_m(x),$$

где P_m — многочлен степени m, а α и β — действительные числа, то этот случай легко привести к предыдущему, замечая, что $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$ выражаются линейно через показательные функции $e^{i\beta x}$ и $e^{-i\beta x}$.

Так как $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ выражаются через одни и те же показательные функции, то естественно рассматривать правую часть более общего вида: $e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$. После замены триго-

нометрических функций показательными это выражение обратится в такое:

$$\frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta i)x}\{P_m^{(1)}(x)-iP_m^{(2)}(x)\}+\frac{1}{2}e^{(\alpha-\beta i)x}\{P_m^{(1)}(x)+iP_m^{(2)}(x)\}.$$

По предыдущему, мы должны искать частное решение в виде:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}Q_m^{(1)}(x)+e^{(\alpha-\beta i)x}Q_m^{(2)}(x), \tag{29}$$

если $\alpha\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения; если же $\alpha\pm\beta i$ суть корни характеристического уравнения кратности r, то выражение (29) должно быть умножено на x^r. Легко видеть, что из системы уравнений (25) или (28) для определения коэффициентов многочлена $Q_m^{(1)}$ соответствующая система для $Q_m^{(2)}$ получается переходом к комплексным сопряжённым значениям коэффициентов уравнений; следовательно, коэффициенты многочлена $Q_m^{(2)}$ окажутся комплексными сопряжёнными с соответствующими коэффициентами многочлена $Q_m^{(1)}$. Поэтому, отделяя действительную часть от мнимой, мы получим: если $Q_m^{(1)}(x)=\overset{*}{Q}_m(x)+i\overset{**}{Q}_m(x)$, то $Q_m^{(2)}(x)=$ $=\overset{*}{Q}_m(x)-i\overset{**}{Q}_m(x)$. Вставляя эти многочлены в выражение (29) и переходя снова от показательных функций к тригонометрическим, находим искомое частное решение:

$$Y=e^{\alpha x}\{2\overset{*}{Q}_m(x)\cos\beta x-2\overset{**}{Q}_m(x)\sin\beta x\}.$$

Это выражение уже не содержит комплексных величин.

В случае, если $\alpha\pm\beta i$ суть корни характеристического уравнения кратности r, предыдущее выражение надо умножить на x^r.

Итак, имеем окончательно: *частное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью вида*

$$e^{\alpha x}\{\cos\beta x\cdot P_m^{(1)}(x)+\sin\beta x\cdot P_m^{(2)}(x)\}$$

можно найти в форме $x^r e^{\alpha x}\{\cos\beta x\cdot Q_m^{(1)}(x)+\sin\beta x\cdot Q_m^{(2)}(x)\}$, *где* $Q_m^{(1)}$ *и* $Q_m^{(2)}$ *— многочлены той же степени, что* $P_m^{(1)}$ *и* $P_m^{(2)}$ *(или наибольшей, если эти степени не равны), а* $r\geqslant 0$ *есть кратность корня* $\alpha\pm\beta i$ *характеристического уравнения.*

На практике опять пишут многочлены $Q_m^{(1)}$ и $Q_m^{(2)}$ с неопределёнными коэффициентами, подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты в обеих частях при выражениях вида $x^l\cos\beta x$ и $x^l\sin\beta x$ $(l=r,\ r+1,\ \ldots,\ r+m)$. Впрочем, иногда удобно производить вычисления и с мнимыми показателями.

Пример 8. Проинтегрировать уравнение: $y''-y=x\cos x\cdot e^x$. Выражение $\alpha\pm\beta i=1\pm i$ не является корнем характеристического уравнения $k^2-1=0$; поэтому частное решение ищем следующим образом: представляем правую часть в виде $\frac{1}{2}xe^{(1+i)x}+\frac{1}{2}xe^{(1-i)x}$

и ищем частное решение уравнения $y''-y=\frac{1}{2}xe^{(1+i)x}$ в форме $Y_1=(Ax+B)e^{(1+i)x}$. Имеем:

$$Y_1'=[A(1+i)x+B(1+i)+A]e^{(1+i)x},$$
$$Y_1''=[2iAx+2Bi+2A(1+i)]e^{(1+i)x}.$$

Подстановка в уравнение даёт:

$$(2i-1)Ax+[(2i-1)B+2A(i+1)]=\frac{1}{2}x,$$

откуда $A=\frac{-1-2i}{10}$, $B=\frac{7-i}{25}$.

Итак, $Y_1=\left(\frac{-1-2i}{10}x+\frac{7-i}{25}\right)e^{(1+i)x}$. Решение Y_2 уравнения $y''-y=\frac{1}{2}xe^{(1-i)x}$ будет комплексным сопряжённым с Y_1: $Y_2=\left(\frac{-1+2i}{10}x+\frac{7+i}{25}\right)e^{(1-i)x}$. Складывая Y_1 и Y_2 и переходя к тригонометрическим функциям, получаем частное решение заданного уравнения в виде $Y=e^x\left\{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{14}{25}\right)\cos x+\left(\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}\right)\sin x\right\}$. Для нахождения общего решения достаточно прибавить к Y выражение $C_1e^x+C_2e^{-x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Предлагаем читателю для сравнения найти это частное решение, задавшись сразу его действительной формой:

$$Y=e^x\{(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\}.$$

Пример 9. Уравнение *упругих колебаний* без сопротивления при наличии возмущающей периодической силы имеет вид (ср. пример 2):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=p\sin\omega t \quad (a,\ p \text{ и } \omega \text{ — постоянные}).$$

Корни характеристического уравнения здесь равны $\pm ai$, правая часть содержит показательные функции $e^{\pm\omega it}$. Возможны два случая:

1) $\omega\neq a$ (частота возмущающей силы не равна частоте собственных колебаний системы). Тогда частное решение должно иметь вид: $x=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$; подставляя его в уравнение, находим: $\alpha=0$, $\beta=\frac{p}{a^2-\omega^2}$; общее решение, $x=A\sin(at+\delta)+\frac{p}{a^2-\omega^2}\sin\omega t$, показывает, что движение получается наложением собственного колебания системы с частотой a и вынужденного колебания частоты ω, совпадающего по фазе с возмущающей силой, если $a>\omega$, и отличающегося на π, если $a<\omega$; амплитуда его пропорциональна амплитуде возмущающей силы и величине $\frac{1}{|a^2-\omega^2|}$; она очень велика, когда ω мало отличается от a.

2) $\omega = a$. Частное решение надо искать в виде $X = t(\alpha \cos at + \beta \sin at)$; тогда $X'' = -a^2 t(\alpha \cos at + \beta \sin at) - 2\alpha a \sin at + 2\beta a \cos at$. Подставляя в уравнение, находим $\alpha = -\frac{p}{2a}$, $\beta = 0$. Общее решение уравнения имеет вид: $x = A \sin(at + \delta) - \frac{p}{2a} t \cos at$. Второй член показывает, что амплитуда колебания неограниченно возрастает; это — так называемое явление *резонанса*, имеющее место при совпадении собственной частоты системы и частоты возмущающей силы. В астрономии член, имеющий вид произведения периодической функции на степень переменного, называется *«вековым членом»*.

Пример 10. Уравнение колебаний при наличии сопротивления и возмущающей периодической силы (ср. пример 3) пишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + a^2x = p \sin \omega t.$$

Предполагая n малым ($n < a$), находим, что корни характеристического уравнения равны $n \pm i\sqrt{a^2 - n^2}$. Так как правая часть в показательной форме содержит функции $e^{\pm i\omega t}$, то частное решение надо искать в форме

$$X = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

Тогда $X' = -M\omega \sin \omega t + N\omega \cos \omega t$, $X'' = -M\omega^2 \cos \omega t - N\omega^2 \sin \omega t$. Сравнение коэффициентов при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ даёт два уравнения:

$$-2n\omega M + (a^2 - \omega^2) N = p,$$
$$(a^2 - \omega^2) M + 2n\omega N = 0,$$

откуда

$$M = \frac{-2n\omega \cdot p}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad N = \frac{(a^2 - \omega^2) \cdot p}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Искомое частное решение:

$$X = \frac{-2n\omega p \cos \omega t + (a^2 - \omega^2) p \sin \omega t}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Вводя амплитуду $\sqrt{M^2 + N^2}$ и начальную фазу $\delta = \operatorname{arctg} \frac{M}{N}$, или $\delta = -\operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{a^2 - \omega^2}$, мы можем написать это решение в виде:

$$X = \frac{p}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

В примере 3 мы видели, что общее решение однородного уравнения имеет вид: $Ae^{-nt} \sin(\sqrt{a^2 - n^2}\, t + \alpha)$; оно представляет свободное затухающее колебание, и после значительного промежутка времени его влияние на движение системы оказывается ничтожным; для больших значений t главное значение имеет член, определяющий

вынужденное колебание. Его частота равна частоте вынуждающей силы, его амплитуда пропорциональна амплитуде p этой силы, и велика, когда a близко к ω; знаменатель в этом случае мал, так как n мало; это — явление резонанса. Заметим, что, в противоположность случаю отсутствия сопротивления, колебания хотя и велики, но не возрастают неограниченно; практически, однако, эта разница несущественна при очень малом n. Наконец, фаза δ вынужденных колебаний не совпадает с фазой силы при $n \neq 0$; замечая, что $\sin\delta$ имеет знак M, т. е. всегда отрицательный, заключаем, что $-\pi < \delta < 0$, т. е. фаза колебания всегда запаздывает сравнительно с фазой силы; это запаздывание мало при малых частотах ω, оно заключено между 0 и $-\frac{\pi}{2}$, если $\omega < a$, равно $-\frac{\pi}{2}$ при полном резонансе ($\omega = a$) и заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $-\pi$, если $\omega > a$.

Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами не имеет вида одной из рассмотренных форм, то остаётся метод вариации постоянных для нахождения частного решения. Рассмотрим важный для приложений случай.

Пример 11. Уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = \varphi(t)$. Фундаментальная система однородного уравнения есть $x_1 = \sin at$, $x_2 = \cos at$. Согласно общей теории предыдущей главы, ищем частное решение в форме $X = C_1 \sin at + C_2 \cos at$, где C_1 и C_2 — функции от t, подобранные так, чтобы удовлетворялось заданное неоднородное уравнение. Для определения их производных по t имеем два линейных уравнения [см. главу V, уравнения (27), стр. 202]:

$$C_1' \sin at + C_2' \cos at = 0, \quad C_1' \cos at - C_2' \sin at = \frac{1}{a} \varphi(t),$$

откуда получаем: $C_1' = \frac{1}{a} \varphi(t) \cos at$, $C_2' = -\frac{1}{a} \varphi(t) \sin at$. Отсюда находим C_1 и C_2: $C_1 = \frac{1}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \cos a\tau \, d\tau$, $C_2 = -\frac{1}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \sin a\tau \, d\tau$.

Внося их значения в выражение для X, находим:

$$X = \sin at \cdot \frac{1}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \cos a\tau \, d\tau - \cos at \cdot \frac{1}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \sin a\tau \, d\tau.$$

Внося множители $\sin at$ и $\cos at$ под знаки интегралов и объединяя оба интеграла, получаем окончательное выражение для частного решения в виде:

$$X(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \varphi(\tau) \sin a(t - \tau) \, d\tau.$$

Легко проверить, что это частное решение удовлетворяет начальным условиям:

$$X(0)=0, \quad X'(0)=0.$$

3. Применение тригонометрических рядов к нахождению частного решения. В приложениях часто встречаются уравнения вида:

$$L[y]=V(x),$$

где $L[y]$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $V(x)$ — периодическая функция, период которой предположим равным 2π. Для простоты рассуждений мы предположим, что оператор L — второго порядка и не содержит члена с первой производной, т. е. $L[y]\equiv y''+qy$ [1]. Функцию $V(x)$ мы будем писать в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье. Итак, имеем уравнение:

$$L[y]\equiv y''+qy=V(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,^{2)}, \tag{30}$$

где q — постоянное. Ищем частное решение $Y(x)$ тоже в виде тригонометрического ряда с неопределёнными коэффициентами:

$$Y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx). \tag{31}$$

Подставляем ряд (31) в уравнение (30) и подбираем его коэффициенты так, чтобы равенство (30) удовлетворялось формально (т. е. мы пока не ставим вопроса о сходимости входящих в рассуждение рядов). Приравнивая свободные члены, имеем:

$$L\left[\frac{A_0}{2}\right]=\frac{a_0}{2}, \quad \text{или} \quad q\frac{A_0}{2}=\frac{a_0}{2},$$

---

[1]) Если $L[y]\equiv y''+py'+qy$, то подстановка $y=e^{-\frac{p}{2}x}z$ приводит L к виду $e^{-\frac{p}{2}x}\left\{z''+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]z\right\}$. Аналогично в линейном операторе n-го порядка $L[y]=y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots$ с постоянными коэффициентами подстановка $y=e^{-\frac{p_1}{n}x}z$ уничтожает член с $y^{(n-1)}$. Указанием, что такая форма уравнения упрощает рассуждения, я обязан А. И. Плеснеру.

[2]) Мы пишем вместо равенства знак $\sim$, так как нас не интересует сходимость ряда в правой части.

откуда $A_0 = \frac{a_0}{q}$. Сразу видно первое необходимое условие существования решения вида (31): если $a_0 \neq 0$, то необходимо $q \neq 0$ (если $q = 0$ и $a_0 = 0$, то коэффициент A_0 остаётся неопределённым).

Затем приравниваем в обеих частях члены, содержащие $\cos nx$ и $\sin nx$, т. е.

$$L[A_n \cos nx + B_n \sin nx] = a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{32}$$

Раскрываем левую часть, замечая, что

$$L[\cos nx] = (-n^2 + q)\cos nx, \quad L[\sin nx] = (-n^2 + q)\sin nx.$$

Приравнивая, далее, коэффициенты при $\cos nx$ и $\sin nx$ в обеих частях (32), находим:

$$A_n = \frac{a_n}{-n^2 + q}, \quad B_n = \frac{b_n}{-n^2 + q}. \tag{33}$$

Для того чтобы формулы (33) имели смысл, необходимо, чтобы не было $-n^2 + q = 0$. Но равенство возможно только, если $q = n^2$, т. е. для оператора $L[y] = y'' + n^2 y$. В этом случае однородное уравнение имеет периодическое решение с частотой n, и член правой части $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ находится в резонансе с этим решением; поэтому a priori нельзя ожидать периодического решения (если при этом $a_n = b_n = 0$, то резонанса не будет, периодические же члены $A_n \cos nx + B_n \sin nx$ с произвольными A_n, B_n входят в общее решение однородного уравнения). Итак, предполагая, что резонанса нет, мы получаем формальное решение уравнения (30) в виде тригонометрического ряда:

$$Y(x) = \frac{a_0}{2q} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{n^2 - q} \cos nx - \frac{b_n}{n^2 - q} \sin nx \right). \tag{34}$$

Остаётся доказать, что ряд (34) действительно сходится и удовлетворяет уравнению (30). Это легко вытекает из следующих соображений. Коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $V(x)$ по известному свойству коэффициентов Фурье стремятся к 0; следовательно, начиная с некоторого n, имеем $|a_n| < 1$, $|b_n| < 1$; с другой стороны, множитель $\frac{1}{n^2 - q}$ для достаточно большого n положителен и не превышает $\frac{A}{n^2}$ ($A > 0$ — постоянное). Итак, члены ряда (34), начиная с некоторого, не превышают по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum \frac{2A}{n^2}$, т. е. ряд (34) *сходится равномерно*. Докажем, наконец, что найденная функция $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (30). Составим выражение:

$$-qY + V(x);$$

это — непрерывная функция x; её ряд Фурье, получаемый как линейная комбинация рядов для Y и V, в силу формул (30) и (34), будет:

$$-q\left[\frac{a_0}{2q}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{n^2-q}\cos nx-\frac{b_n}{n^2-q}\sin nx\right)\right]+$$
$$+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2a_n}{n^2-q}\cos nx+\frac{n^2b_n}{n^2-q}\sin nx\right).$$

Получившийся ряд Фурье есть дважды продифференцированный ряд (34); следовательно, представляемая им непрерывная функция есть вторая производная от $Y(x)$[1]), и мы имеем тождество:

$$Y''(x)=-pY+V(x),$$

т. е. *$Y(x)$ удовлетворяет уравнению* (30).

Тот же метод и то же рассуждение применяется к уравнению n-го порядка:

$$y^{(n)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=V(x)\sim$$
$$\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx),$$

с постоянными коэффициентами. Коэффициенты решения для $n=4$ имеют значения:

$$A_0=\frac{a_0}{p_4},$$
$$A_m=\frac{(m^4-p_2m^2+p_4)\,a_m+p_3mb_m}{(m^4-p_2m^2+p_4)^2+p_3^2m^2},$$
$$B_m=\frac{-p_3ma_m+(m^4-p_2m^2+p_4)\,b_m}{(m^4-p_2m^2+p_4)^2+p_3^2m^2}.$$

Примечание 1. Если $V(x)$, разлагаемая в ряд Фурье, не является непрерывной функцией, то приведённое рассуждение показывает, что $Y(x)$ удовлетворяет уравнению в каждом интервале непрерывности $V(x)$.

---

[1]) В этом факте проще всего убедиться, интегрируя полученный ряд Фурье два раза.

Пример 12. Найти периодическое решение уравнения $y'' - y = V(x)$, где

$$V(x) = \begin{cases} +1 & \text{для } 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \\ -1 & \text{для } (2k-1)\pi < x < 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

Известно, что

$$V(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right).$$

Здесь у нас $q = -1$, $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}$. Следовательно, согласно формуле (34), искомое решение представляется рядом:

$$Y(x) = \frac{4}{\pi}\left\{-\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x}{3(9+1)} - \ldots - \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)[(2n+1)^2+1]} - \ldots\right\}.$$

Этот ряд представляет непрерывную периодическую функцию и удовлетворяет уравнению всюду, кроме точек $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, где правая часть уравнения имеет разрыв.

Примечание 2. Если характеристическое уравнение имеет корни $\pm ni$, то член $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ тригонометрического ряда в правой части даёт резонанс; в соответствующем члене ряда (34) коэффициенты имеют 0 в знаменателе. Чтобы найти частное решение, напишем правую часть в виде $\big(V(x) - u_n(x)\big) + u_n(x)$. Ряд Фурье для $V(x) - u_n(x)$ не содержит члена с частотой n, он даёт начало частному решению вида (34); затем отдельно решаем уравнение: $L[y] = u_n(x)$; его частное решение имеет вид: $x(\bar{A}_n \cos nx + \bar{B}_n \sin nx)$; член же вида $A_n \cos nx + B_n \sin nx$ с произвольными A_n и B_n войдёт в общее решение однородного уравнения.

Итак, решение получится как сумма периодических и векового членов.

ЗАДАЧИ.

Найти общее решение уравнений:

153. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

154. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$.

155. $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.

156. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x+1)e^x$.

157. $y'' + 4y = x \sin 2x$.

158. $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

159. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

160. $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

161. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

162. $y'' + 9y = \ln\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|$.

Указание. Разложить правую часть в ряд Фурье.

4. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Если с помощью замены переменных мы сумеем линейное уравнение с переменными коэффициен-

тами преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами, то мы с помощью обратного преобразования найдём в элементарных функциях решение данного уравнения.

Пример 13. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$. Делаем замену независимого переменного $x=\cos\varphi$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{dy}{d\varphi};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{dy}{d\varphi}\right)=\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2}-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\frac{dy}{d\varphi}.$$

Подставляя в уравнение, получаем $\frac{d^2y}{d\varphi^2}+n^2y=0$. Следовательно фундаментальная система преобразованного уравнения будет: $y_1=\cos n\varphi$, $y_2=\sin n\varphi$. Возвращаясь к переменному x, имеем:

$$y_1=\cos n\arccos x,\quad y_2=\sin n\arccos x.$$

Функция $y_1(x)$ при n целом является многочленом степени n, так как $\cos n\varphi$ выражается в виде многочлена от $\cos\varphi$ [1]). Это — так называемый *многочлен Чебышева* n-й степени [2])

$$T_n(x)=\cos n\arccos x.$$

Пример 14. Уравнение Бесселя имеет вид:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0.$$

---

[1]) В самом деле, по формуле Муавра имеем:

$$e^{ni\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\sum_{k=0}^{n}i^k\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi\cdot\sin^k\varphi.$$

Отделяем действительную часть:

$$\cos n\varphi=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}\varphi\cdot\sin^{2l}\varphi=$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^l.$$

[2]) Эти многочлены были изучены и применены к теории наилучшего приближения функций знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым (1821—1894).

Здесь n есть любое постоянное число. Покажем, что при $n=\frac{1}{2}$ уравнение Бесселя интегрируется в элементарных функциях. Уравнение в этом случае имеет вид:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

Сделаем замену искомой функции:

$$y=\frac{z}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}z.$$

Дифференцируем два раза: $y'=x^{-\frac{1}{2}}z'-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z$, $y''=x^{-\frac{1}{2}}z''-$ $-x^{-\frac{3}{2}}z'+\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}z$. Подставляем в данное уравнение:

$$x^{\frac{3}{2}}z''-x^{\frac{1}{2}}z'+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}z+x^{\frac{1}{2}}z'-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z+x^{\frac{3}{2}}z-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}z=0,$$

или, после упрощений, $z''+z=0$ — уравнение с постоянными коэффициентами; его фундаментальная система есть $z_1=\cos x$, $z_2=\sin x$. Возвращаясь к переменному y, находим:

$$y_1=\frac{\cos x}{\sqrt{x}},\quad y_2=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

В разобранных примерах нельзя усмотреть непосредственно, существует ли замена переменных, приводящая данное уравнение к новому с постоянными коэффициентами. Сейчас мы рассмотрим один тип уравнений, где такая подстановка всегда может быть указана. *Уравнение Эйлера* имеет вид:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0; \qquad (35)$$

здесь a_1, $a_2,\ldots,a_n$ — постоянные. Уравнение (35) не изменяется, если заменить x через Cx. Следовательно, если ввести новое независимое переменное t формулой

$$t=\ln x,\quad x=e^t, \qquad (36)$$

то уравнение в новом переменном t будет неизменным при замене t на $t+C$, т. е. новое уравнение не содержит явно t (ср. главу I, § 3, **3**). Так как от замены независимого переменного оно не перестанет быть линейным, то мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами[1]).

---

[1]) Уравнение (35) имеет точку $x=0$ в качестве особой; формула (36) и все последующие имеют в виду значения $x>0$; при рассмотрении значений $x<0$ надо всюду заменить x через $|x|$.

Подтвердим это рассуждение непосредственными выкладками. Вычислим выражения последовательных производных от y по x через производные по t, где x и t связаны зависимостью (36). Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right);$$

мы замечаем, что выражения первой и второй производной по x содержат множители e^{-t} и e^{-2t}. Допустим, что k-я производная имеет вид:

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\alpha_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\ldots+\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ — постоянные. Тогда производная $(k+1)$-го порядка будет равна:

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)=$$
$$=e^{-(k+1)t}\left(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^ky}{dt^k}+\ldots-k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

т. е. опять множитель $e^{-(k+1)t}$ впереди, а в скобке — линейная комбинация производных от $(k+1)$-го до первого порядков с постоянными коэффициентами. Итак, это свойство доказано для всякого натурального k. Когда мы будем вычисленные нами производные подставлять в уравнение (35), нам придётся при всяком k умножать $\frac{d^ky}{dx^k}$ на $a_kx^k=a_ke^{kt}$; при этом показательные множители, содержащие t, сократятся, и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример 15. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$. Замена переменного $x=e^t$ даёт $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$; характеристическое уравнение $k^2+2k+1=0$ имеет равные корни: $k_1=k_2=-1$. Общее решение в функции t:

$$y=e^{-t}(C_1+C_2t),$$

а в функции x:

$$y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x).$$

Примечание 1. Мы заранее знаем, что в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, частные решения имеют вид: $e^{kt}=(e^t)^k$; следовательно, в исходном уравнении они имеют вид x^k. Поэтому можно непосредственно задаться этим видом частного решения и подставить его в уравнение (35). Замечая, что

$$x^m\frac{d^m(x^k)}{dx^m}=k(k-1)\ldots(k-m+1)x^k, \quad m\leqslant k,$$

и внося эти выражения в уравнение (35), мы, по сокращении на x^k, получим алгебраическое уравнение n-й степени для определения k:

$$k(k-1)\ldots(k-n+1)+a_1k(k-1)\ldots(k-n+2)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-2}k(k-1)+a_{n-1}k+a_n=0. \qquad (37)$$

Из предыдущих рассуждений очевидно, что это уравнение (37) совпадает с характеристическим уравнением для дифференциального уравнения в переменном t. Каждому простому корню k уравнения (37) соответствует частное решение x^k уравнения (35), двойному корню соответствуют два решения x^k и $x^k \ln x$ и т. д. В случае мнимых корней k надо иметь в виду, что, по определению, $x^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}$; паре комплексных сопряжённых корней $\alpha\pm\beta i$ уравнения (37) будут, таким образом, соответствовать два решения уравнения (35): $y=x^\alpha\cos(\beta\ln x)$ и $y=x^\alpha\sin(\beta\ln x)$.

Пример 16. $x^2y''+3xy'+5y=0$. Разыскивая частное решение в форме $y=x^k$, приходим к квадратному уравнению для k, именно: $k(k-1)+3k+5=0$, или $k^2+2k+5=0$. Отсюда $k=-1\pm 2i$. Общее решение: $y=\frac{1}{x}[C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)]$.

Примечание 2. Подстановкой, подобной (36), приводится к уравнению с постоянными коэффициентами несколько более общее уравнение:

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+$$
$$+\ldots+a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_ny=0.$$

Здесь достаточно положить $ax+b=e^t$, чтобы притти к уравнению с постоянными коэффициентами.

Примечание 3. Подобно тому как для уравнений с постоянными коэффициентами можно рациональными операциями найти частное решение в случае правой части вида $\sum e^{\alpha x}P(x)$, так для рассматриваемого класса уравнений такое нахождение, очевидно, возможно, если правая часть имеет вид: $\sum x^\alpha P(\ln x)$, где P — многочлен.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

163. $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}R=0.$

164. $x^2y''-4xy'+6y=x.$

165. $x^2y''-xy'+2y=x\ln x.$

166. $x^2y''-2y=x^2+\frac{1}{x}.$

167. $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x.$

168. $(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=4\cos\ln(1+x).$

§ 2. Линейные уравнения второго порядка.

1. Приведение к простейшим формам. Мы будем рассматривать однородные линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{38}$$

или же

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0. \tag{38'}$$

Коэффициенты P, Q или p_0, p_1, p_2 будем предполагать непрерывными функциями от x.

Рассмотрим некоторые упрощённые формы уравнения второго порядка.

Как известно из главы V (стр. 209), *самосопряжённое* уравнение второго порядка имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=0. \tag{39}$$

Докажем, что *всякое уравнение второго порядка может быть приведено к самосопряжённой форме умножением на некоторую функцию от x.*

Уравнение (39), написанное в раскрытом виде,

$$py''+p'y'+qy=0,$$

показывает, что коэффициент при y' есть производная от коэффициента при y''. Умножим обе части уравнения (38′) на некоторую функцию $\mu(x)$ и постараемся подобрать эту функцию так, чтобы для нового уравнения выполнялось условие:

$$(\mu p_0(x))'=\mu p_1(x).$$

Преобразуем это уравнение для μ:

$$p_0\mu'+p_0'\mu=p_1\mu;\ \frac{\mu'}{\mu}=\frac{p_1-p_0'}{p_0},\quad \ln\mu=\int\frac{p_1}{p_0}\,dx-\int\frac{p_0'\,dx}{p_0},$$

$$\mu=\frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}.$$

По умножении на μ уравнение (38′) примет вид:

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y''+\frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'+\frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y=0,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y=0,$$

т. е., действительно, вид (39), где $p = e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$, $q = \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$. Заметим, что коэффициенты p, q непрерывны во всяком интервале, где p_0 не обращается в 0; кроме того, в этом интервале $p > 0$.

Пример 17. Привести к самосопряжённому виду уравнение Бесселя: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Здесь $p_0 = x^2$, $p_1 = x$; $\mu = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$. Искомый вид: $\frac{d}{dx}(xy') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$.

Заменой независимого переменного можно привести линейное уравнение второго порядка к виду:

$$y'' + Q(x) y = 0. \tag{40}$$

Пусть уравнение уже приведено к форме (39). Вводим новое независимое переменное ξ уравнениями $d\xi = \frac{dx}{p(x)}$, $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$; ξ как функция x определена во всяком интервале оси x, где $p \neq 0$. Так как $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p} > 0$, то, обратно, x определяется как непрерывная и дифференцируемая функция от ξ в соответствующих интервалах оси ξ, $x = \chi(\xi)$. Тогда $\frac{du}{dx} = \frac{1}{p} \frac{du}{d\xi}$ для любой функции u. Подставляя в уравнение (39), находим:

$$\frac{1}{p} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right) + qy = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} + Q(\xi) y = 0$$

— уравнение вида (40), где $Q(\xi)$ есть результат подстановки в $p(x) q(x)$ значения $x = \chi(\xi)$. Если вернуться к форме (38′), то мы получим:

$$d\xi = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx} dx, \qquad Q = \frac{p_2}{p_0} e^{2\int \frac{p_1}{p_0} dx}.$$

Это преобразование, упрощая уравнение, приводит его иногда к виду, для которого известно общее решение уравнения.

Пример 18. $xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0$. Приводим к самосопряжённому виду умножением на $x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}\right) - x^{-\frac{1}{2}} y = 0, \text{ или } x^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} y\right) - y = 0.$$

Вводим переменное ξ: $x^{-\frac{1}{2}} dx = d\xi$, $\xi = 2\sqrt{x}$.

Преобразованное уравнение: $\frac{d^2y}{d\xi^2} - y = 0$; его общее решение $y = C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}$. Возвращаясь к переменному x, находим:

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}.$$

Линейной заменой искомой функции также можно уничтожить член с первой производной, т. е. привести уравнение к виду (40). Возьмём исходное уравнение с коэффициентом при второй производной, равным единице:

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0. \tag{38}$$

Введём новую искомую функцию z, связанную со старой соотношением

$$y = u(x) z, \tag{41}$$

и подберём функцию u так, чтобы в преобразованном уравнении обратился в 0 коэффициент при z'. Дифференцируем (41) два раза:

$$y' = uz' + u'z, \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$uz'' + (2u' + Pu) z' + (u'' + Pu' + Qu) z = 0. \tag{42}$$

Приравниваем нулю коэффициент при z':

$$2u' + Pu = 0.$$

Находим значение u и подставляем в уравнение (42), сокращая на показательный множитель:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx};\ u' = -\frac{1}{2} P e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx};\ u'' = \left(\frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} P'\right) e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx};$$

$$z'' + \left(-\frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} P' + Q\right) z = 0. \tag{42'}$$

Мы получили уравнение вида (40). Функция от x

$$I(x) = Q - \frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} P' \tag{43}$$

называется *инвариантом* уравнения (38). Очевидно, эта функция не изменяет своей величины при всех преобразованиях уравнения помощью подстановок вида (41), так как все уравнения, в которых искомые функции отличаются только множителем $u(x)$, приводятся к одному и тому же уравнению вида (42'). Равенство инвариантов двух уравнений второго порядка есть необходимое и достаточное условие того, чтобы одно из них могло быть преобразовано в другое подстановкой вида (41).

Замечание. Следует отметить, что во всяком линейном уравнении без правой части можно произвести понижение порядка, поскольку такое уравнение будет однородным относительно искомой функции и её производных, однако при таком понижении порядка мы получим нелинейное уравнение.

В применении к уравнению (38) после замены $y = e^{\int z\,dx}$ мы получим уравнение типа Рикатти:

$$z' = -(z^2 + P(x)z + Q(x)).$$

Легко видеть, что каждое уравнение типа Рикатти:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

при помощи замены $y = -\frac{1}{p(x)}\frac{u'}{u}$ сведётся к линейному однородному уравнению 2-го порядка.

Пример 19. Доказать, что уравнение

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

подстановкой вида (41) приводится к уравнению Бесселя нормального вида $z'' + \frac{1}{x}z' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)z = 0$, и выразить n через m.

Для заданного уравнения имеем: $I_1 = 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{m^2 + \frac{3}{4}}{x^2}$. Для уравнения Бесселя: $I_2 = 1 - \frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$. Очевидно, равенство $I_1 = I_2$ удовлетворяется, если $m^2 + \frac{3}{4} = n^2 - \frac{1}{4}$. Отсюда $n^2 = m^2 + 1$.

ЗАДАЧА.

169. Какое преобразование вида (41) приводит уравнение примера 19 к нормальному виду Бесселя?

Преобразование линейного уравнения к виду (40) подстановкой (41) иногда даёт возможность притти к одному из типов уравнений, которые мы умеем интегрировать.

Пример 20. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$. Применяем преобразование $y = u(x)z$; $uz'' + \left(2u' + \frac{2}{x}u\right)z' + \left(u'' + \frac{2}{x}u' + u\right)z = 0$. Приравниваем нулю коэффициент при z'; это даёт нам $u = \frac{1}{x}$; далее, $u' = -\frac{1}{x^2}$, $u'' = \frac{2}{x^3}$. Подставляем в уравнение:

$$\frac{1}{x}z'' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)z = 0,$$

или $z'' + z = 0$. Отсюда $z = C_1\cos x + C_2\sin x$, или $y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$. См. также пример 14.

ЗАДАЧИ.

170. Привести к нормальном виду Бесселя уравнение $y'' + \frac{2p}{x} y' + y = 0$.

Проинтегрировать уравнения:

171. $xy'' - y' - x^3 y = 0$.

172. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1) y = -3e^{x^2} \sin 2x$.

173. $y'' - \frac{1}{\sqrt{x}} y' + \frac{y}{4x^2} (-8 + x^{\frac{1}{2}} + x) = 0$.

2. Интегрирование посредством степенных рядов. Ввиду большой важности многих дифференциальных линейных уравнений второго порядка для приложений, в тех случаях, когда их интегрирование при помощи элементарных функций не удаётся, их решения вводятся в качестве новых трансцендентных функций. Таковы, например, *функции Бесселя* первого и второго рода — два линейно независимых решения уравнения Бесселя. Для определения этих функций часто пользуются представлением решения уравнения в виде степенного ряда по возрастающим степеням $x - x_0$, где x_0 — начальное значение. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что если коэффициенты p_0, p_1, p_2 уравнения (38′) являются многочленами или степенными рядами из целых неотрицательных степеней $x - x_0$, причём $p_0(x_0)$ не равно нулю, то решения уравнения (38′) тоже выражаются сходящимися степенными рядами по целым неотрицательным степеням $x - x_0$. Не доказывая здесь этого общего положения, мы сумеем в каждом отдельном случае доказать сходимость рядов, представляющих решения данного уравнения.

Пример 21. Найти общее решение уравнения $y'' + xy = 0$. Ищем это решение в виде степенного ряда по степеням x: $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$ Формальным дифференцированием находим: $y'' = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 x + \ldots + n(n-1) A_n x^{n-2} + \ldots$ Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$2 \cdot 1 \cdot A_2 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot A_3 + A_0 = 0,$$

$$4 \cdot 3 \cdot A_4 + A_1 = 0, \ \ldots, \quad n(n-1) A_n + A_{n-3} = 0, \ \ldots$$

Из этих уравнений находим:

$$A_2 = 0, \ A_3 = -\frac{A_0}{2 \cdot 3}, \quad A_4 = -\frac{A_1}{3 \cdot 4}, \ A_5 = -\frac{A_2}{4 \cdot 5} = 0,$$

$$A_6 = -\frac{A_3}{5 \cdot 6} = \frac{A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad A_7 = -\frac{A_4}{6 \cdot 7} = \frac{A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

и, вообще, $A_{3k-1} = 0$, $A_{3k} = (-1)^k \frac{A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3k-1) 3k}$, $A_{3k+1} = (-1)^k \frac{A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3k(3k+1)}$. Коэффициенты A_0 и A_1 не опре-

деляются этими уравнениями, это — два произвольных постоянных. Общее решение имеет вид:

$$y = A_0 \left\{1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6 \ldots (3k-1)\, 3k} + \ldots\right\} + \\ + A_1 \left\{ x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \ldots + \\ + (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \ldots 3k\,(3k+1)} + \ldots \right\} = A_0 y_1(x) + A_1 y_2(x).$$

С помощью элементарных признаков легко установить сходимость рядов $y_1(x)$ и $y_2(x)$ для всех значений x; по общим свойствам степенных рядов эти ряды, так же как полученные из них формальным дифференцированием, сходятся равномерно на любом конечном отрезке оси x. Следовательно, формальное получение этих решений оправдано, и они являются, в самом деле, решениями данного уравнения[1]).

ЗАДАЧА.

174. Проинтегрировать с помощью ряда, расположенного по степеням x, уравнение $y'' + xy' + y = 0$.

Метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений рядами, расположенными по степеням $x - x_0$, применим также в некоторых случаях, когда коэффициент $p_0(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$. Однако получаемые при этом степенные ряды (сходящиеся) содержат, вообще говоря, не целые степени $x - x_0$, а имеют вид:

$$A_0(x - x_0)^r + A_1(x - x_0)^{r+1} + \ldots + A_n(x - x_0)^{r+n} + \ldots, \qquad (44)$$

где r — некоторое число, вообще не целое. Уже из (44) ясно, что полное значение такого разложения может обнаружиться лишь при рассмотрении x как комплексного переменного, так как при $x - x_0 < 0$ и дробном или иррациональном r выражение $(x - x_0)^r$ в действительной области может не иметь смысла. Теория Фукса даёт условия, при которых уравнение n-го порядка имеет n частных решений вида (44) или ещё более общего — произведения многочлена от $\ln(x - x_0)$ на ряд этого вида. Мы опять ограничимся рассмотрением одного случая, имеющего, однако, большой теоретический интерес, — так называемого гипергеометрического уравнения.

Рассмотрим уравнение вида:

$$(x^2 + Ax + B)\frac{d^2y}{dx^2} + (Cx + D)\frac{dy}{dx} + Ey = 0. \qquad (45)$$

Корни многочлена второй степени, стоящего множителем при y'', пусть будут различны и действительны (однако последнее ограничение от-

---

[1]) Очевидно, описанный здесь приём применим к линейному дифференциальному уравнению любого порядка.

падёт, если рассматривать переменное x в комплексной области). Чтобы не вводить мнимых величин, мы предположим также, что A, B, C, D, E — действительные числа. В таком случае можно переписать уравнение (45) в виде:

$$(x-x_1)(x-x_2)y''+(Cx+D)y'+Ey=0, \tag{45'}$$

где x_1 и x_2 — корни многочлена x^2+Ax+B. Это показывает, что коэффициент при y'' обращается в нуль при значениях $x=x_1$ и $x=x_2$. Преобразуем независимое переменное так, чтобы эти значения были 0 и 1. Для этого вводим новое переменное z, связанное с x соотношением:

$$x=x_1-z(x_1-x_2).$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dy}{dz}\frac{1}{x_1-x_2}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{(x_1-x_2)^2},$$

$$x-x_1=-z(x_1-x_2), \qquad x-x_2=(1-z)(x_1-x_2),$$

и мы получаем:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}-Cz\right]\frac{dy}{dz}-Ey=0.$$

Вводя обозначения $\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}=\gamma$, $C=\alpha+\beta+1$, $E=\alpha\beta$ и обозначая независимое переменное снова через x, мы получим *гипергеометрическое уравнение* в обычном его виде:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \tag{46}$$

Пример 22. Привести к виду (46) *уравнение Лежандра* $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$. Замена переменного $x=1-2z$ даёт:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-2z)\frac{dy}{dz}+n(n+1)y=0.$$

Здесь $\gamma=1$, $\alpha=n+1$, $\beta=-n$.

Мы видим, что уравнение (46) зависит от трёх параметров: α, β, γ, причём параметры α и β входят симметрично. Найдём решения уравнения (46) в виде рядов по степеням x. Подставляем в уравнение ряды:

$$\left.\begin{aligned} y&=A_0x^r+A_1x^{r+1}+\ldots+A_nx^{r+n}+\ldots,\\ y'&=rA_0x^{r-1}+(r+1)A_1x^r+\ldots+(r+n)A_nx^{r+n-1}+\ldots,\\ y''&=r(r-1)A_0x^{r-2}+(r+1)rA_1x^{r-1}+\ldots\\ &\qquad\ldots+(r+n)(r+n-1)A_nx^{r+n-2}+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Последний из рядов (47) умножаем на $1-x^2$, второй ряд — на

$\gamma-(\alpha+\beta+1)x$, первый — на $-\alpha\beta$, складываем, собираем коэффициенты при одинаковых степенях x и приравниваем их нулю. Низшая степень x в результате будет $r-1$; приравниваем нулю коэффициент при x^{r-1}:

$$r(r-1)A_0+\gamma r A_0=0.$$

Без ограничения общности можно положить $A_0\neq 0$. Тогда для r получается квадратное уравнение:

$$r(r-1+\gamma)=0,$$

откуда $r_1=0$, $r_2=1-\gamma$.

Исследуем решение, соответствующее значению $r_1=0$. Ряды (47) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} y &= A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots,\\ y' &= A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots,\\ y'' &= 2A_2+6A_3x+\ldots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (47')$$

Подстановка в уравнение (46) рядов (47′) даёт свободный член в виде $\gamma A_1-\alpha\beta A_0=0$, откуда, предполагая $\gamma\neq 0$,

$$A_1=A_0\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}.$$

Собирая члены при x, получим:

$$2A_2+2\gamma A_2-(\alpha+\beta+1)A_1-\alpha\beta A_1=0,$$

или

$$2(\gamma+1)A_2=(\alpha+1)(\beta+1)A_1;$$

следовательно (если $\gamma\neq -1$),

$$A_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}A_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}A_0.$$

Вообще, члены, содержащие x^n, дают:

$$(n+1)nA_{n+1}-n(n-1)A_n+\gamma(n+1)A_{n+1}-\\ -(\alpha+\beta+1)nA_n-\alpha\beta A_n=0,$$

или

$$(n+1)(\gamma+n)A_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)A_n=0,$$

откуда (если $\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -n$)

$$A_{n+1}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}A_n=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\beta+n)(\beta+n-1)}{(n+1)n(\gamma+n)(\gamma+n-1)}A_{n-1}=\ldots\\ \ldots=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}A_0.$$

Полагая произвольное постоянное $A_0=1$, получаем, в предположении, что γ не равно нулю или целому отрицательному числу, частное

решение уравнения (46) — так называемый *гипергеометрический ряд*:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot2\ldots(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1} + \ldots \quad (48)$$

Признак сходимости Даламбера показывает, что ряд (48) сходится при $|x| < 1$; как известно из теории степенных рядов, он сходится равномерно в любом замкнутом интервале, внутреннем к $(-1,\ +1)$, и допускает почленное дифференцирование любое число раз; следовательно, он удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению (46). Итак, первое частное решение уравнения (46) есть

$$y_1 = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) \quad (\gamma \neq 0,\ -1\ -2,\ \ldots).$$

Чтобы получить второе частное решение, можно было бы воспользоваться рядами (47), полагая в них $r = 1 - \gamma$. Но мы скорее придём к цели, если в уравнение (46) введём новую функцию w, связанную с y соотношением:

$$y = x^{1-\gamma}w.$$

Тогда

$$y' = x^{1-\gamma}w' + (1-\gamma)x^{-\gamma}w,$$
$$y'' = x^{1-\gamma}w'' + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}w' - \gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}w.$$

Подставляем в уравнение (46):

$$x^{1-\gamma}x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + x^{1-\gamma}[\gamma-(\alpha+\beta+1)x + 2(1-\gamma)(1-x)]\frac{dw}{dx} +$$
$$+ x^{1-\gamma}[-\alpha\beta + \gamma(1-\gamma)x^{-1} - (\alpha+\beta+1)(1-\gamma) -$$
$$- \gamma(1-\gamma)x^{-1} + \gamma(1-\gamma)]w = 0,$$

или

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x]\frac{dw}{dx} -$$
$$-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)w = 0,$$

т. е. мы получили опять гипергеометрическое уравнение, в которое вместо параметров α, β, γ входят соответственно $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$, $2-\gamma$. Его решение в виде ряда, начинающегося с члена, не содержащего x, есть $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x)$. Итак, второе частное решение уравнения (46) есть

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x).$$

Оно имеет смысл, если $2-\gamma$ не равно нулю или целому отрицательному числу. В частности, оно имеет смысл всегда, когда γ равно нулю или целому отрицательному числу, т. е. когда теряет смысл y_1. Мы не останавливаемся на нахождении второго частного решения в указанных исключительных случаях.

Гипергеометрический ряд, содержащий три параметра, α, β, γ, даёт при частных значениях этих параметров весьма большое число различных элементарных функций. Например, при $\alpha=\gamma$ получаем:

$$F(\alpha, \beta, \alpha; x) = 1 + \frac{\beta}{1} x + \frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!} x^n + \ldots = (1-x)^{-\beta}.$$

Далее, при $\alpha=\beta=1$, $\gamma=2$, имеем:

$$F(1, 1, 2; x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}.$$

Заметим, наконец, что при α или β, равном целому отрицательному числу $-n$, ряд (48) обрывается на члене, содержащем x^n, т. е. является многочленом относительно x. Так, например, при n целом одно решение уравнения Лежандра (см. пример 22) является многочленом; с точностью до постоянного множителя A_n этот так называемый многочлен Лежандра выражается так:

$$P_n(x) = A_n F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Метод, применённый нами для интегрирования гипергеометрического уравнения, применим к большому числу уравнений второго порядка, встречающихся в физике и механике. Так, например, для уравнения Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0;$$

в случае, если n не равно целому числу, он даёт два ряда по возрастающим степеням x, начинающихся соответственно с x^n и x^{-n}; эти ряды определяют *функции Бесселя* $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$; общее решение уравнения Бесселя есть $C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$.

Если n равно целому числу (можно принять $n \geqslant 0$), то только одно частное решение выражается степенным рядом: $J_n(x)$ — *функция Бесселя первого рода*; второе частное решение содержит ещё $\ln x$; оно называется функцией Бесселя второго рода.

Тот же способ без изменений может быть применён к нахождению решений уравнений порядка выше второго.

3. Линейные уравнения второго порядка с колеблющимися решениями. Рассмотрение двух простейших уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - a^2 y = 0, \qquad (49_1)$$

$$y'' + a^2 y = 0 \qquad (49_2)$$

показывает глубокую разницу между характером функций, являющихся их частными решениями. Каждое решение уравнения (49_1) может на всём интервале ($-\infty$, $+\infty$) обратиться в нуль не более одного раза (это можно доказать непосредственным вычислением). Между тем каждое решение уравнения (49_2), выражаемое формулой $A\sin(ax+\delta)$, имеет бесчисленное множество нулей, расстояние между которыми равно $\frac{\pi}{a}$; каждый интервал длины $>\frac{\pi}{a}$ содержит, по крайней мере, один нуль любого решения уравнения (49_2), а интервал длины $>\frac{2\pi}{a}$ — по крайней мере два нуля.

Если решение дифференциального уравнения имеет в данном интервале не более одного нуля, оно называется *неколеблющимся* в этом интервале, в противоположном случае — *колеблющимся*.

Итак, *уравнение вида* $y''+qy=0$ *имеет неколеблющиеся в любом интервале интегралы, если* $q\leqslant 0$, *и колеблющиеся в достаточно большом интервале, если* $q>0$.

Мы обобщим этот результат на уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением уравнений вида:

$$y''+Q(x)y=0, \tag{40}$$

так как к этому типу мы можем привести любое уравнение подстановкой:

$$y=u(x)z. \tag{41}$$

При этом, если первоначальное уравнение было вида:

$$p_0y''+p_1y'+p_2y=0, \tag{38'}$$

то $u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}$. Мы будем рассматривать лишь те интервалы, где p_0 не обращается в 0. В этих интервалах $u(x)$ остаётся непрерывным и не обращается в 0; поэтому функции y и z имеют одни и те же нули.

ТЕОРЕМА. *Если в интервале* (a, b) *имеем всюду* $Q(x)\leqslant 0$, *то все решения уравнения*

$$y''+Q(x)y=0 \tag{40}$$

суть неколеблющиеся.

Допустим, что некоторое решение $y_1(x)$ уравнения (40) имеет, по крайней мере, два нуля; пусть нули будут x_0, x_1, $x_0<x_1$, и пусть в интервале (x_0, x_1) функция y_1 не имеет других

нулей [1]). Тогда $y_1(x)$, как непрерывная функция, сохраняет постоянный знак в интервале (x_0, x_1); всегда можно допустить, что в этом интервале $y_1(x) > 0$ [иначе мы взяли бы решение $-y_1(x)$]. Мы имеем $y_1'(x_0) > 0$ (так как y_1 возрастает вправо от x_0; при этом $y_1'(x_0) \neq 0$, иначе было бы $y_1 \equiv 0$).

Если $Q(x) \leqslant 0$, то из уравнения (40) следует, что $y_1''(x) \geqslant 0$ во всём интервале (x_0, x_1). Следовательно, $y_1'(x)$ не убывает в интервале (x_0, x_1), т. е. $y_1'(x) \geqslant y_1'(x_0)$ для $x_0 < x \leqslant x_1$; отсюда, в силу теоремы о конечном приращении, имеем:

$$y_1(x_1) \geqslant y_1(x_0) + y_1'(x_0)(x_1 - x_0) = y_1'(x_0)(x_1 - x_0) > 0,$$

что противоречит условию $y_1(x_1) = 0$. Противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА ШТУРМА. *Если x_0 и x_1 суть два последовательных нуля решения $y_1(x)$ дифференциального уравнения второго порядка, то всякое другое линейно независимое решение $y_2(x)$ того же уравнения имеет в точности один нуль между x_0 и x_1.*

Для доказательства нет нужды пользоваться приведённой формой уравнения (40). Будем рассматривать уравнение хотя бы вида (38′), причём, как всегда, предполагаем, что в нашем интервале и на его концах $p_0(x) \neq 0$. Составляем определитель Вронского:

$$y_1'(x)\, y_2(x) - y_2'(x)\, y_1(x) = W(x). \tag{50}$$

Допустим, что во всём интервале (x_0, x_1) решение $y_2(x)$ не имеет нулей. В силу линейной независимости решений y_1 и y_2, последнее не обращается в нуль также при $x = x_0$ и $x = x_1$; в самом деле, если бы было, например, $y_2(x_0) = 0$, то мы имели бы $W(x_0) = 0$, что противоречит известному свойству определителя Вронского. Так как $W(x)$ не обращается в нуль, то он сохраняет постоянный знак; допустим для определённости $W(x) > 0$. Деля обе части

---

[1]) Все нули любого не тождественно равного нулю решения $y_1(x)$ дифференциального уравнения в интервале, где коэффициенты p_0, p_1, p_2 непрерывны и p_0 не обращается в нуль, являются изолированными, т. е. существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ каждого нуля x_0, не содержащая других нулей. В противном случае точка x_0 была бы предельной точкой для нулей $y_1(x)$, т. е. существовала бы последовательность нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тогда мы имели бы: $\dfrac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Так как функция y_1 дифференцируема, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{y_1(x_0 + h) - y_1(x_0)}{h} = y_1'(x_0) = 0.$$

Итак, в точке $x = x_0$ мы имели бы: $y_1(x_0) = 0$, $y_1'(x_0) = 0$, т. е. по теореме Коши $y_1 \equiv 0$, против предположения. Из доказанного следует ещё, что функция $y_1(x)$ имеет конечное число нулей во всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, внутреннем к (a, b).

тождества (50) на $[y_2(x)]^2$, получаем:

$$\frac{y_1'(x)\,y_2(x)-y_2'(x)\,y_1(x)}{[y_2(x)]^2}=\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2},\quad \text{или}\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)=\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2}.$$

В силу допущения, что $y_2(x)\neq 0$, мы имеем в правой части непрерывную функцию от x; интегрируем последнее тождество в пределах от x_0 до x_1. Получаем:

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]_{x=x_0}^{x=x_1}=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2}\,dx.$$

Левая часть равна нулю в силу условий $y_1(x_0)=y_1(x_1)=0$, а в правой части стоит интеграл от положительной функции, т. е. положительная величина. Противоречие доказывает, что между двумя последовательными нулями $y_1(x)$ существует, по крайней мере, один нуль $y_2(x)$. Если бы их было два, $y_2(\overline{x}_0)=y_2(\overline{x}_1)=0$, $x_0<\overline{x}_0<\overline{x}_1<x_1$, то, переменяя роли y_1 и y_2, мы доказали бы существование нуля функции $y_1(x)$ между $\overline{x}_0$ и $\overline{x}_1$, следовательно, между x_0 и x_1, а это противоречит условию, что $y_1(x)$ не имеет нулей между x_0 и x_1. Теорема доказана.

Теорему Штурма можно ещё сформулировать так: *нули двух линейно независимых решений взаимно разделяют друг друга.*

Примером, иллюстрирующим теорему Штурма, является $\sin x$ и $\cos x$, два линейно независимых решения уравнения $y''+y=0$; их нули действительно взаимно разделяют друг друга.

Следствие. Если в интервале (a, b) одно решение линейного уравнения имеет более двух нулей, то все решения — колеблющиеся.

Теорема Штурма устанавливала, что все решения одного и того же уравнения, вообще говоря, имеют одинаковый характер колебания. Следующая теорема может служить для сравнения характера колебаний решений двух различных уравнений. Мы будем предполагать уравнения данными в виде, не заключающем члена с первой производной.

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ. *Если имеем два уравнения*

$$y''+Q_1(x)\,y=0,\qquad z''+Q_2(x)\,z=0 \tag{51}$$

и если $Q_2(x)\geqslant Q_1(x)$ в интервале (a, b), то между каждыми двумя нулями любого решения $\overline{y}(x)$ первого уравнения заключён, по крайней мере, один нуль каждого решения $\overline{z}(x)$ второго уравнения.

Пусть x_0 и x_1 суть два последовательных нуля функции $\overline{y}(x)$; допустим, что между ними нет ни одного нуля функции $\overline{z}(x)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\overline{y}(x)>0$, $\overline{z}(x)>0$ в интервале (x_0, x_1). Тогда $\overline{y}(x)$ будет возрастать вправо

от x_0 и возрастать влево от x_1; следовательно, в силу уже применённого рассуждения, $\bar{y}'(x_0) > 0$, $\bar{y}'(x_1) < 0$. Подставляем $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ в соответствующие уравнения (51); первое из полученных тождеств умножаем на $\bar{z}(x)$, второе — на $\bar{y}(x)$ и вычитаем второе из первого:

$$\bar{y}''(x)\bar{z}(x) - \bar{z}''(x)\bar{y}(x) = [Q_2(x) - Q_1(x)]\bar{y}(x)\bar{z}(x).$$

Левая часть есть производная от выражения $\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)$. Интегрируя обе части последнего тождества в пределах от x_0 до x_1, имеем:

$$[\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)]_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (Q_2 - Q_1)\bar{y}\bar{z}\,dx. \tag{52}$$

В силу наших предположений интеграл в правой части (52) не отрицателен (он строго > 0, если не везде $Q_2 = Q_1$). В левой части (52) имеем: $\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) - \bar{y}'(x_0)\bar{z}(x_0)$; в силу допущения, что $\bar{z} > 0$, принимая во внимание знаки $\bar{y}'(x_0)$ и $\bar{y}'(x_1)$, получаем в левой части отрицательное число. Противоречие доказывает теорему. Мы скажем, что решения второго из уравнений (51) являются *более колеблющимися*, чем решения первого уравнения.

Если, сохраняя условия теоремы, предположить, дополнительно, что $Q_2(x) > Q_1(x)$ хотя бы для некоторых значений x интервала $(x_0\ x_1)$ и что $\bar{z}(x_0) = 0$, то следующий вправо нуль $\bar{z}(x)$ будет лежать л е в е е x_1. Действительно, из обратного предположения вытекало бы, что левая часть (52) отрицательна, в то время как правая положительна. Итак, мы получаем ещё теорему:

Если для уравнений (51) x_0 *является общим нулём двух каких-либо частных решений* $\bar{y}(x)$ *и* $\bar{z}(x)$ *каждого из этих уравнений и если в промежутке между* x_0 *и следующим за* x_0 *нулём* x_1 *решения* $\bar{y}(x)$ *существуют точки, где* $Q_2(x) > Q_1(x)$, *а всюду, кроме них,* $Q_2(x) - Q_1(x)$ *не отрицательно, то ближайший справа к* x_0 *нуль* $\bar{z}(x)$ *расположен левее, чем* x_1.

Теорему сравнения большей частью применяют, используя в качестве одного из уравнений (51) уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + a^2 y = 0. \tag{49$_2$}$$

Пусть нам дано уравнение:

$$y'' + Q(x)y = 0, \tag{40}$$

в котором $Q(x) > 0$ в замкнутом интервале $[a, b]$, и пусть M есть максимум Q в этом интервале, а m — минимум. Предположим, что $M > m$, т. е. что $Q(x)$ не равно постоянному в рассматриваемом интервале. Принимая за первое уравнение (51) уравнение $y'' + my = 0$, а за второе — данное, получаем следующий результат: *расстояние между двумя последовательными нулями уравнения* (40) *меньше,*

чем $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Принимая затем данное уравнение за первое из уравнений (51), а в качестве второго принимая $y''+My=0$, получаем второе предложение: *расстояние между двумя последовательными нулями уравнения* (40) *больше, чем* $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Эта теорема даёт оценку сверху и снизу расстояния между нулями колеблющихся решений дифференциальных уравнений.

Пример 23. Рассмотрим уравнение Бесселя для $x>0$:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0.$$

Чтобы уничтожить член с первой производной, надо применить подстановку $y=x^{-\frac{1}{2}}z$; получаем уравнение:

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0.$$

Сравнивая с уравнением $w''+w=0$, заключаем: расстояние между двумя последовательными нулями всякого решения уравнения Бесселя больше π при $n>{}^1/_2$ и меньше π при $0\leqslant n<{}^1/_2$. С другой стороны, замечая, что при достаточно большом x выражение $1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}$ может быть сделано сколь угодно близким к единице, находим: при достаточно больших значениях x расстояние между последовательными нулями решений уравнения Бесселя как угодно близко к π.

Пример 24. Уравнение $y''+xy=0$ при $x>0$. Возьмём любое малое число $\alpha>0$. Если взять $x>\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, то коэффициент при y будет $>\frac{\pi^2}{\alpha^2}$; сравнивая с уравнением $z''+\frac{\pi^2}{\alpha^2}z=0$, находим, что при рассматриваемых значениях x нули решений нашего уравнения находятся на расстоянии $<\pi:\frac{\pi}{\alpha}=\alpha$. Таким образом, при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого решения неограниченно сближаются.

Мы видим, что если на неограниченном интервале $x>a$ нижняя граница функции $Q(x)$ равна некоторому положительному числу, то решения уравнения (40) имеют нули более частые, чем некоторая синусоида, т. е. каждое решение имеет бесчисленное множество нулей. Рассмотрим теперь случай, когда $Q(x)$, оставаясь положительным, стремится к нулю при $x\to\infty$. За уравнение сравнения возьмём уравнение Эйлера (для $x>0$):

$$y''+\frac{a^2}{x^2}y=0. \tag{53}$$

Его решения имеют вид x^k, где k есть корень уравнения $k(k-1)+a^2=0$. Решаем это уравнение:

$$k=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}.$$

Если $a^2 > \frac{1}{4}$, то корни k_1 и k_2 — комплексные; решения

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right), \qquad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right)$$

имеют бесчисленное множество нулей в интервале $(1, \infty)$.

Если $a^2 < \frac{1}{4}$, мы имеем решения неколеблющиеся:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}};$$

точно так же, если $a^2 = \frac{1}{4}$, то

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \ln x.$$

Сравнивая с уравнением (53) уравнения вида (40), можем сказать: *если, начиная с некоторого x, постоянно имеем $0 < Q(x) \leqslant \frac{1}{4x^2}$, то решение уравнения* (40) *не может иметь бесконечного числа нулей; если, начиная с некоторого значения x, имеем $Q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2}$, где $\alpha > 0$, то решение уравнения* (40) *имеет бесчисленное множество нулей* (теорема Кнезера).

Так, уравнение $y'' + \frac{A}{x^3} y = 0$ не может иметь решений с бесконечным числом нулей на интервале $(1, \infty)$.

Заметим, что все приведённые условия являются только достаточными для существования колеблющихся или неколеблющихся решений; они не дают ответа на вопрос о колебаниях, если функция $Q(x)$ меняет знак или если её нижняя граница на интервале (a, ∞) равна нулю, а верхняя положительна.

4. Теорема Шпета. Если в уравнении (40) $Q(x) \equiv 0$, то оно имеет фундаментальную систему решений $1, x$; теорема Шпета утверждает, что если $Q(x)$ достаточно быстро стремится к 0 при $x \to \infty$, то, независимо от знака Q, фундаментальная система соответствующего уравнения при больших значениях x мало отличается от $1, x$. Введём обозначение: если при $x \to \infty$ отношение $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ остаётся ограниченным, мы будем писать $f(x) = O(x^\alpha)$.

ТЕОРЕМА. *Если $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$, где $k > 0$ $(0 \leqslant x < \infty)$, то уравнение* (40) *обладает такой фундаментальной системой y_1, y_2, что $y_1(x) - 1 = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$; $y_2(x) - x = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ при $k \neq 1$, и $y_2(x) - x = O(\ln x)$ при $k = 1$.*

Для доказательства рассмотрим более общее уравнение, содержащее параметр λ,

$$y'' = \lambda Q(x) y, \tag{54}$$

которое обращается в заданное при $\lambda = -1$. Пусть $Q(x)$ определено для $0 \leqslant x < \infty$. Ищем решение уравнения (54) в виде ряда по степеням λ:

$$y = y^{(0)} + \lambda y^{(1)} + \ldots + \lambda^n y^{(n)} + \ldots \tag{55}$$

Сначала построим y_1; положим $y_1^{(0)}=1$; подставляя выражение (55) в уравнение (54) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентные уравнения для определения $y_1^{(n)}$:

$$y_1^{(1)''}=Q(x),\quad y_1^{(n)''}=Q(x)\,y^{(n-1)},\quad n=2,\,3,\dots;$$

$$y_1(x)=1+\lambda y_1^{(1)}+\dots+\lambda^n y_1^{(n)}+\dots \tag{55$_1$}$$

Функции $y_1^{(n)}$ последовательно найдутся квадратурами, которые мы возьмём в виде:

$$y_1^{(1)}=\int_x^\infty d\xi\int_\xi^\infty Q(t)\,dt;\quad y_1^{(n)}=\int_x^\infty d\xi\int_\xi^\infty Q(t)\,y_1^{(n-1)}(t)\,dt,\quad n=2,\,3,\dots \tag{56}$$

Докажем, что несобственные интегралы в формулах (56) сходятся, и оценим $\left|y_1^{(n)}\right|$.

Из условия $Q(x)=O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$ следует существование такой положительной постоянной A, что при $0\leqslant x<\infty$ имеет место неравенство:

$$|Q(x)|<\frac{A}{(1+x)^{k+2}}.$$

Отсюда находим:

$$\left|y_1^{(1)}\right|<\int_x^\infty d\xi\int_\xi^\infty\frac{A\,dt}{(1+t)^{k+2}}=A\int_x^\infty\frac{d\xi}{(k+1)(1+\xi)^{k+1}}=\frac{A}{k(k+1)}\,\frac{1}{(1+x)^k};$$

$$\left|y_1^{(2)}\right|<\int_x^\infty d\xi\int_\xi^\infty\frac{A}{(1+t)^{k+2}}\,\frac{A}{k(k+1)}\,\frac{1}{(1+t)^k}\,dt=\frac{A^2}{k(k+1)\,2k(2k+1)}\,\frac{1}{(1+x)^{2k}}.$$

Полной индукцией легко доказывается оценка:

$$\left|y_1^{(n)}\right|<\frac{A^n}{k(k+1)\,2k(2k+1)\dots nk(nk+1)}\,\frac{1}{(1+x)^{nk}}.$$

Из этих оценок следует, что ряд (55$_1$) сходится абсолютно и равномерно для $0\leqslant x<\infty$ при любом λ (в частности при $\lambda=-1$) и представляет решение уравнения (54).

Наконец, из неравенства

$$|y_1-1|<\frac{|\lambda|A}{k(k+1)}\,\frac{1}{(1+x)^k}\left\{1+\frac{|\lambda|A}{2k(2k+1)}\,\frac{1}{(1+x)^k}+\right.$$
$$\left.+\frac{|\lambda|^2A^2}{2k(2k+1)\,3k(3k+1)}\,\frac{1}{(1+x)^{2k}}+\dots\right\},$$

где в фигурных скобках стоит сходящийся ряд, сумма которого стремится к 1 при $x\to\infty$, получаем:

$$y_1(x)-1=O\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

Для решения $y_1(x)$ теорема доказана.

Далее строим $y_2(x)$; полагаем в ряде (55) $y_2^{(0)} = x$; для определения $y_2^{(n)}$ имеем уравнения:

$$y_2^{(1)''} = Q(x)\,x, \qquad y_2^{(n)''} = Q(x)\,y_2^{(n-1)}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

$$y_2(x) = x + \lambda y_2^{(1)} + \ldots + \lambda^n y_2^{(n)} + \ldots \tag{55$_2$}$$

Если $k > 1$, то попрежнему берём квадратуры с бесконечными верхними пределами:

$$y_2^{(1)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,t\,dt, \quad y_2^{(n)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(n-1)}(t)\,dt, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{56$'$}$$

Несобственные интегралы сходятся, и мы будем иметь оценки для $\left|y_2^{(n)}\right|$ при $0 \leqslant x < \infty$:

$$\left|y_2^{(1)}\right| < \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A}{(1+t)^{k+2}}(1+t)\,dt = \frac{A}{k(k-1)}\,\frac{1}{(1+x)^{k-1}};$$

$$\left|y_2^{(n)}\right| < \frac{A^n}{k(k-1)\,2k(2k-1)\ldots nk(nk-1)}\,\frac{1}{(1+x)^{nk-1}}.$$

Ряд из правых частей сходится абсолютно и равномерно, и мы имеем аналогично предыдущему:

$$y_2(x) - x = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

В этом случае теорема доказана полностью.

Пусть, наконец, $0 < k \leqslant 1$; найдётся такое натуральное m, что $mk \leqslant 1$, $(m+1)\,k > 1$. Тогда берём квадратуры следующим образом:

$$y_2^{(1)} = -\int_0^x d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,t\,dt,$$

$$y_2^{(l)} = -\int_0^x d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(l-1)}(t)\,dt, \qquad l = 2, 3, \ldots, m;$$

$$y_2^{(m+n)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(m+n-1)}(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь мы имеем оценки; если $mk < 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left|y_2^{(1)}\right| < \int_{-1}^x d\xi \int_\xi^\infty \frac{A(1+t)}{(1+t)^{k+2}}\,dt = \int_{-1}^x \frac{A}{k}\,\frac{dt}{(1+t)^k} = \frac{A}{k(1-k)}\,(1+x)^{1-k};\\
&\left|y_2^{(2)}\right| < \int_{-1}^x d\xi \int_\xi^\infty \frac{A(1+t)^{1-k}}{k(1-k)}\cdot\frac{A}{(1+t)^{k+2}} =\\
&\qquad\qquad = \frac{A^2}{k(1-k)\,2k(1-2k)}\,(1+x)^{1-2k};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left|y_2^{(m)}\right| < \frac{A^m}{k(1-k)\ldots mk(1-mk)}\,(1+x)^{1-mk} = B\,(1+x)^{1-mk},
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

а если $mk = 1$, то

$$\left|y_2^{(m)}\right| < \frac{A^m}{k(1-k)\ldots mk}\ln(1+x) = B'\ln(1+x). \qquad (57')$$

Мы можем обе оценки свести к одной. Выбираем положительное число $\delta < k$ и замечаем, что $\ln(1+x) < \frac{1}{\delta}(1+x)^{\delta}$ при $0 \leqslant x < \infty$; таким образом, вместо (57) и (57′) можем написать одно неравенство:

$$\left|y_2^{(m)}\right| < B(1+x)^{\delta}, \qquad B > 0, \qquad 0 < \delta < k.$$

Далее находим:

$$\left|y_2^{(m+1)}\right| < B\int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A}{(1+t)^{k-\delta+2}}\,dt = \frac{BA}{(k-\delta)(k-\delta+1)}\,\frac{1}{(1+x)^{x-\delta}};$$

$$\left|y_2^{(m+n)}\right| < \frac{BA^{n+1}}{(k-\delta)(k-\delta+1)(2k-\delta)\ldots(nk-\delta+1)}\,\frac{1}{(1+x)^{nk-\delta}},\ n = 2, 3, \ldots$$

Легко доказывается равномерная сходимость для $0 \leqslant x < \infty$ ряда из правых частей неравенств, начиная с индекса $m+1$, причём порядок $y_2(x) - x$ равен порядку члена $y_2^{(1)}$, т. е. он равен $O(x^{1-k}) = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)$, если $k \neq 1$, и равен $O(\ln x)$ для $k = 1$, в силу оценки (57′) при $m = 1$.

Теорема доказана полностью,

Пример 25. Линейное уравнение $y'' + x^{-4}y = 0$ принадлежит к рассматриваемому типу, здесь $m = 2$. Подстановкой $y = e^{-\int z\,dx}$, $\frac{y'}{y} = -z$ оно приводится к уравнению Риккати $z' = z^2 + z^{-4}$; решение этого последнего (см. задачу 44) есть $z = \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}$. Итак, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right)$; $y = Ax\sin\left(\frac{1}{x} + C\right) = C_1x\sin\frac{1}{x} + C_2x\cos\frac{1}{x}$.

Фундаментальная система:

$$y_1 = x\sin\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{x^4} - \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y_2 = x\cos\frac{1}{x} = x - \frac{1}{2!}\frac{1}{x} + \frac{1}{4!}\frac{1}{x^3} - \ldots = x + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

ГЛАВА VII.

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений.

1. Задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае ставится так: дано k уравнений

$$F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}; \ldots; y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}) = 0 \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

связывающих независимое переменное x, k искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и их производные до порядков, соответственно, $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Требуется определить искомые функции. Заметим, что всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций [1]). Теория уравнений, заданных в общем виде (1), приводит к рассмотрению ряда случаев; мы рассмотрим лишь важнейший случай и потому сразу введём ограничение: мы предположим, что система (1) может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в неё функций, т. е. относительно $y_1^{(m_1)}, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_k^{(m_k)}$; при выполнении этого допущения система (1) в разрешённом виде будет:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}), \\
y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_k^{(m_k)} = f_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}).
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Система вида (2) называется *канонической*.

---

1) Системы дифференциальных уравнений, в которых число уравнений меньше числа искомых функций, называются уравнениями Монжа. В этом курсе мы встретимся с уравнением Монжа и его частным видом — уравнением Пфаффа — в главе IX.

Каноническую систему из k уравнений высших порядков можно заменить эквивалентною ей системою $n = m_1 + m_2 \ldots + m_k$ уравнений первого порядка, разрешённых относительно производных всех n искомых функций. Для этого вводим новую систему искомых функций, числом $n - k$, следующим образом: обозначим для симметрии $y_1 = y_{10}$ и введём новые функции:

$$y_1' = y_{11}, \quad y_1'' = y_{12}, \ldots, \quad y_1^{(m_1-1)} = y_{1,\, m_1-1}.$$

Далее, аналогично:

$$y_2 = y_{20}, \quad y_2' = y_{21}, \quad y_2'' = y_{22}, \ldots, \quad y_2^{(m_2-1)} = y_{2,\, m_2-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k = y_{k0}, \quad y_k' = y_{k1}, \quad y_k'' = y_{k2}, \ldots, \quad y_k^{(m_k-1)} = y_{k,\, m_k-1}.$$

Мы имеем всего $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ функций y_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1$); для них система (2) заменится следующею, ей эквивалентною:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_{10}}{dx} = y_{11}, \quad \frac{dy_{11}}{dx} = y_{12}, \ldots, \quad \frac{dy_{1,\, m_1-2}}{dx} = y_{1,\, m_1-1},\\
&\frac{dy_{1,\, m_1-1}}{dx} = f_1(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\, m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\, m_k-1}),\\
&\frac{dy_{20}}{dx} = y_{21}, \quad \frac{dy_{21}}{dx} = y_{22}, \ldots, \quad \frac{dy_{2,\, m_2-2}}{dx} = y_{2,\, m_2-1},\\
&\frac{dy_{2,\, m_2-1}}{dx} = f_2(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\, m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\, m_k-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_{k0}}{dx} = y_{k1}, \quad \frac{dy_{k1}}{dx} = y_{k2}, \ldots, \quad \frac{dy_{k,\, m_k-2}}{dx} = y_{k,\, m_k-1},\\
&\frac{dy_{k,\, m_k-1}}{dx} = f_k(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\, m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\, m_k-1}).
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Каждая (например i-я) из k групп уравнений (3) содержит $m_i - 1$ уравнений, которые непосредственно следуют из определения функций y_{ij}, и последнее уравнение, которое получается из i-го уравнения системы (2), если в его правой части входящие в него производные заменить вновь введёнными функциями. Заменяя, в силу первых уравнений первой строки системы (3), последовательно y_{11} через $\frac{dy_1}{dx}$, y_{12} через $\frac{dy_{11}}{dx} = \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{dy_{1\cdot m_1-1}}{dx} = \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}$ и аналогично для других групп и внося эти значения в последние уравнения каждой группы, мы, очевидно, возвращаемся к системе (2). Отвлекаясь

от частного вида первых уравнений каждой группы системы (3) и от разделения уравнений этой системы на группы, мы пронумеруем искомые функции в виде одного простого ряда:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

и будем рассматривать вместо системы (3) следующую:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Система n уравнений первого порядка вида (4), т. е. разрешённых относительно входящих в систему производных от искомых функций, называется системой, имеющей *нормальную форму Коши*. Такими системами мы будем преимущественно заниматься в дальнейшем. Очевидно, что система (3), как частный случай системы (4), имеет также нормальную форму.

Примечание. Частным случаем канонической системы является одно уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Мы уже видели (глава IV), что введением новых функций:

$$y_1 = y', \; y_2 = y'', \; \ldots, \; y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

оно заменится следующей системой n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \; \ldots, \; \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

2. Можно утверждать и обратно, что, вообще говоря, нормальная система n уравнений первого порядка (4) эквивалентна одному уравнению порядка n.

В самом деле, дифференцируем первое из уравнений (4) по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx};$$

заменяем в результате $\frac{dy_i}{dx}$ через их выражения $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$; получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

т. е. выражение вида:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n). \tag{4_2}$$

Полученное уравнение (4_2) снова дифференцируем по x; принимая во внимание уравнения (4), получим:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n,$$

или

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n). \tag{4_3}$$

Продолжая этот же процесс, получим далее:

$$\frac{d^4y_1}{dx^4} = F_4(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \tag{4_4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \tag{4_{n-1}}$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n). \tag{4_n}$$

Из системы (А) $n-1$ уравнений, составленной из первого уравнения группы (4) и из (4_2), (4_3), ..., (4_{n-1}), можно, вообще говоря, определить $n-1$ величин $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ через $x,\ y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$; внося эти выражения в (4_n), мы получим уравнение вида:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right), \tag{5}$$

т. е. одно уравнение n-го порядка. Из самого способа его получения следует, что если $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ представляют решение системы (4), то y_1 удовлетворяет уравнению (5). Обратно, если мы имеем решение $y_1(x)$ уравнения (5), то, дифференцируя это решение, мы вычислим $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$. Вставим эти значения, как известные функции от x, в систему (А); мы, по предположению, можем разрешить эту систему относительно $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$, т. е. получить выражения $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ как функции от x. Остаётся показать, что функции

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

удовлетворяют системе (4).

В самом деле, условие разрешимости системы (А) относительно $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ состоит в том, что якобиан $\frac{D(f_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_{n-1})}{D(y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n)}$ отличен от нуля при рассматриваемых значениях $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$.

В наших предположениях функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ обращают в тождества все уравнения системы (A); в частности, имеем тождество $\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Дифференцируя это тождество по x, получаем: $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$, но, в силу (4_2), имеем тождественно:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n.$$

Вычитая одно тождество из другого, находим:

$$\frac{\partial f_1}{dy_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_1\right) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0.$$

Аналогично, дифференцируя тождество (4_2) по x и вычитая из полученного результата тождество (4_3), получим:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0$$

и т. д., наконец,

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{dy_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0.$$

Замечая, что, в силу тождества $\frac{dy_1}{dx} = f_1$, первые члены всех равенств исчезают, и рассматривая оставшиеся равенства как систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $\frac{dy_i}{dx} - f_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, заключаем, так как, по условию, определитель системы не равен нулю, что имеют место тождества $\frac{dy_2}{dx} = f_2, \ldots, \frac{dy_n}{dx} = f_n$, т. е. $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ действительно суть решения системы (4).

Таким образом, при сделанных допущениях *интеграция одного уравнения n-го порядка* (5) *даёт возможность путём дифференцирований и разрешений найти решение системы* (4).

Примечание. Последнее доказательство содержало предположение о разрешимости системы уравнений (A) относительно y_2, $y_3, \ldots, y_n$. Если это условие не выполнено, то указанные выкладки не приводят к одному уравнению n-го порядка, эквивалентному системе (4). Простейший случай этого рода представляет система:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Здесь невозможно заменить систему эквивалентным ей уравнением второго порядка относительно y_1; если f_2 действительно зависит от y_1, то можно зато составить уравнение второго порядка относительно y_2, эквивалентное этой системе.

Если же второе уравнение имеет вид:

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2),$$

то нельзя составить также уравнения второго порядка относительно y_2, эквивалентного данной системе.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{dz}{dx} = -y$. Дифференцируем первое уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; используя второе, находим: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, откуда $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; далее, из первого уравнения

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

ЗАДАЧИ.

Привести следующие системы к одному уравнению высшего порядка и таким образом найти их общие решения:

175. $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = z$, $\frac{dz}{dt} = x$.

176. $\frac{dy}{dx} = y + z$, $\frac{dz}{dx} = y + z + x$.

177. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y$.

178. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$.

3. В главе IV проведено доказательство теоремы существования решений для канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка: если правые части уравнений (4) непрерывны в некоторой области, заключающей точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ и удовлетворяют в этой области условиям Липшица по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то существует одно и только одно решение системы (4), определённое в некотором замкнутом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ и удовлетворяющее начальным условиям: при $x = x_0$

$$y_1 = y_1^0, \ y_2 = y_2^0, \ \ldots, \ y_n = y_n^0.$$

Замечая, что общая каноническая система (2) путём введения вспомогательных функций приводится к системе (4), мы можем непосредственно получить теорему существования для системы (2):

Если правые части уравнений (2) *непрерывны в некоторой окрестности начальных значений* x_0, $(y_i^{(j)})_0$ *и удовлетворяют в этой окрестности условиям Липшица по* $y_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, m_i - 1)$, *то существует единственная система функций* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$, *определённая в интервале* $(x_0 - h, x_0 + h)$ *и удовлетворяющая начальным условиям:*

$$y_i(x_0) = (y_i)_0, \ y_i'(x_0) = (y_i')_0, \ \ldots, \ y_i^{(m_i-1)}(x_0) = (y_i^{(m_i-1)})_0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать системы уравнений первого порядка.

Мы имели геометрическую интерпретацию решений системы (4): мы называли их кривыми в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Теорема существования и единственности получила такое истолкование: *через каждую точку рассматриваемой области $(n+1)$-мерного пространства проходит единственная интегральная кривая.*

4. Можно дать ещё одну интерпретацию системы дифференциальных уравнений первого порядка, особенно важную для приложений к механике и физике. Будем обозначать независимое переменное буквой t и рассматривать его как время; искомые функции обозначим буквами x_1, x_2, ..., x_n, причём систему значений этих переменных будем рассматривать как координаты точки n-мерного пространства, которое обычно называют *фазовым пространством* R^n.

Система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Мы скажем, что *система* (6) *определяет в каждый момент времени t в данной точке фазового пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ компоненты скорости $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ движущейся точки*[1]. Можно представить всю рассматриваемую область пространства R^n заполненной непрерывной движущейся средой, причём скорости частиц этой среды в каждый момент заданы уравнениями (6).

Задача нахождения решения системы (6) состоит в определении величин x_1, x_2, ..., x_n в функции t, если дано, что при $t = t_0$ координаты имеют начальные значения $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n$. В нашей интерпретации это значит: *найти функции*

$$x_1 = \varphi_1(t; t_0, \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t; t_0, \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n), \tag{7}$$

дающие для любого момента времени t положение движущейся точки, которая в начальный момент t_0 занимала начальное положение $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n$.

---

[1]) Для обеспечения существования и единственности решения системы (6) мы предполагаем все функции X_i в рассматриваемой ограниченной и замкнутой области пространства R^n для рассматриваемого промежутка времени (обычно от $-\infty$ до $+\infty$) непрерывными и удовлетворяющими условиям Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обычно при такой интерпретации система (6) называется *динамической системой*, а каждое её решение (7) — *движением*. Кривая, описываемая точкой при движении, называется *траекторией движения*. Уравнения траектории движения, определённого начальными значениями $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, даются в параметрической форме теми же уравнениями (7), причём параметром является время t.

Общее решение системы (6) зависит от n произвольных постоянных, например от начальных значений координат $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ при $t=t_0$, и, следовательно, определяет ∞^n траекторий.

Наибольший интерес представляет частный случай системы (6), когда правые части не зависят явно от t:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt}=X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (6')$$

Уравнения (6') определяют *стационарное движение* среды; скорость в каждой точке пространства не зависит от времени и, следовательно, является постоянной в этой точке в течение всего времени. Общее решение уравнения опять зависит от n произвольных постоянных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — координат начального положения точки, траектория которой рассматривается. Мы опять имеем ∞^n движений. Но заметим, что уравнения (6') не изменяются, если заменить независимое переменное t через $t+\tau$ (τ — постоянное).

Пусть решение системы (6'), соответствующее начальным данным $t=0$, $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $\ldots$, $x_n=x_n^0$, будет:

$$x_1=\varphi_1(t;\ x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n=\varphi_n(t;\ x_1^0, \ldots, x_n^0). \qquad (7')$$

В силу последнего замечания, решением будет также система функций:

$$x_1=\varphi_1(t+\tau;\ x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n=\varphi_n(t+\tau;\ x_1^0, \ldots, x_n^0), \qquad (7'')$$

где τ — произвольное постоянное. Уравнения (7'') представляют ту же траекторию, что и уравнения (7'), но при $\tau \neq 0$ они представляют, вообще, другое движение; в самом деле, в движении (7'') начальное положение (при $t=0$) движущейся точки определяется координатами:

$$x_1^{(1)}=\varphi_1(\tau;\ x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n^{(1)}=\varphi_n(\tau;\ x_1^0, \ldots, x_n^0); \qquad (7''')$$

эта точка лежит на траектории (7'), но проходится в движении (7') не в момент $t=0$, а в момент $t=\tau$. Движение (7'') может быть также записано в форме (7') с начальными данными $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$:

$$x_1=\varphi_1(t;\ x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, x_n=\varphi_n(t;\ x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}). \qquad (7^{IV})$$

Итак, в случае стационарного движения на каждой траектории совершается ∞^1 движений; все частицы, лежащие в начальный

момент на данной траектории, описывают одну и ту же линию в фазовом пространстве, следуя по этой линии одна за другой. Подсчитаем, от скольких параметров зависит в стационарном случае семейство траекторий, рассматриваемых как кривые n-мерного пространства. Предполагая, что в некоторой области функция $X_n(x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль, мы можем в системе (6′) принять за независимое переменное x_n и заменить эту систему следующей:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}; \quad \frac{dt}{dx_n}=\frac{1}{X_n}. \qquad (6'')$$

Система первых $n-1$ дифференциальных уравнений (6″) определяет те же кривые, что система (6′); время в эту систему вовсе не входит. Из предыдущего следует, что эта система $n-1$ уравнений определяет семейство кривых, зависящее от $n-1$ параметров, причём через каждую точку рассматриваемой области фазового пространства проходит одна кривая семейства. *Таким образом, в случае стационарного движения семейство траекторий зависит от $n-1$ параметров.* Эти траектории часто называются *линиями тока.*

После того как система $n-1$ первых уравнений (6″) проинтегрирована, для полной характеристики движения нужно ещё определить связь между координатами и временем. Для этого берём последнее уравнение системы (6″): $dt=\frac{dx_n}{X_n}$; заменяя в выражении X_n величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ найденными функциями от x_n, получаем выражение вида:

$$dt=\psi(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ — постоянные, вошедшие при интеграции системы $n-1$ первых уравнений; отсюда

$$t+\tau=\int\limits_{x_n^0}^{x_n}\psi\,dx_n=\Psi(x_n, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

(τ — постоянное интеграции). Из полученного уравнения можно определить, обратно, x_n через $t+\tau$, так как

$$\frac{d\Psi}{dx_n}=\psi(x_n)=\frac{1}{X_n}\neq 0;$$

получаем:

$$x_n=\varphi_n(t+\tau).$$

Отсюда и остальные координаты, найденные в функции x_n, могут быть выражены через время; мы получим выражение всех движений в виде:

$$x_i=\varphi_i(t+\tau, C_1, \ldots, C_{n-1}) \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n);$$

семейство движений зависит, таким образом, от n параметров:

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1},\ \tau.$$

Рассмотрим, с точки зрения этой интерпретации, движение материальной точки в одном измерении; уравнение движения имеет в общем случае вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

(сила зависит от времени, положения и скорости точки). Преобразуем это уравнение в систему; вводя вторую искомую функцию $y = \frac{dx}{dt}$, получаем систему:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(t,\ x,\ y).$$

Каждая траектория этой системы на фазовой плоскости xOy будет показывать в любой момент t положение точки (абсцисса x) и её скорость (ордината y). Семейство траекторий зависит от двух параметров: из каждой точки $(x_0,\ y_0)$ в момент t_0 выходит одна траектория.

Если же сила не зависит от времени, то система имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x,\ y).$$

Чтобы определить траектории в этом случае, можно исключить dt; получаем: уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}$. Семейство траекторий зависит от одного параметра, через каждую точку фазовой плоскости xOy, в которой функция f определена и где числитель и знаменатель одновременно не обращаются в нуль, проходит единственная траектория.

Пример 2. Уравнение упругих колебаний в одном измерении имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x;$$

переходя к системе, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -a^2x.$$

Общее решение исходного уравнения можно написать в виде $x = A\sin a(t + C)$; по самому определению функции y имеем: $y = aA\cos a(t + C)$, где A и C — произвольные постоянные. Семейство траекторий в фазовой плоскости мы получим, если исключим t; будем иметь:

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = A^2.$$

Это — семейство подобных эллипсов с полуосями A и aA, зависящих от одного параметра A; на каждой траектории происходит ∞-движений, которые мы получим все по одному разу, давая C, например, следующие значения:

$$0 \leqslant C < \frac{2\pi}{a}.$$

Система дифференциальных уравнений вида (6′) обладает ещё одним замечательным свойством: *она определяет однопараметрическую группу преобразований пространства* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В самом деле, на равенства (7′), дающие решение системы (6′), можно смотреть как на формулы, определяющие преобразование, при котором точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ переходит в точку $(x_1, \ldots, x_n)$. Эти формулы определяют семейство преобразований, непрерывно зависящее от параметра t. Значению $t=0$ соответствует тождественное преобразование. Покажем, что преобразования (7′) образуют группу. Если к точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ применить преобразование, соответствующее значению τ параметра t, то преобразованная точка $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ будет дана формулами (7‴); если затем к точке $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ применить преобразование, соответствующее параметру t, то мы получим точку $(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую формулами (7^{IV}); но она же даётся формулами (7″). Итак, два последовательных преобразования, соответствующих значениям параметра τ и t, эквивалентны одному преобразованию со значением параметра $t+\tau$:

$$\varphi_i(t; \varphi_1(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, \varphi_n(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0)) \equiv \varphi_i(t+\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$i=1, 2, \ldots, n,$$

а эти равенства и выражают свойство группы. Легко видеть, что эта группа коммутативна: тот же результат получится, если сначала произвести преобразование t, а затем τ. Преобразование (7′) допускает обратное преобразование, соответствующее значению параметра $-t$. Все эти рассуждения справедливы для достаточно малых значений $|t|$, для которых существует решение (7′) системы (6′).

§ 2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Теорема существования. Линейными дифференциальными уравнениями мы называем уравнения, в которые производные от искомых функций и сами эти функции входят линейно.

Мы будем рассматривать нормальные системы линейных уравнений. Такая система имеет вид ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые

функции, x — независимое переменное):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=V_1,\\ &\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=V_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=V_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где a_{ik} и правые части V_i суть данные непрерывные функции от x. Если не все $V_i(x)$ тождественно равны нулю, линейная система называется неоднородной; если правые части V_i равны тождественно нулю, то линейная система однородна; она имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0,\\ &\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если системы (8) и (9) имеют одни и те же коэффициенты, то однородная система (9) называется соответствующей неоднородной системе (8).

Пусть функции a_{ik} и V_i непрерывны (следовательно, ограничены) *на некотором замкнутом отрезке S, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$* (если эти функции непрерывны при всех значениях x, то можно взять за x_1 отрицательное число, сколь угодно большое по абсолютной величине, а в качестве x_2 сколь угодно большое положительное число).

Пусть K — верхняя граница абсолютных величин V_i и a_{ik} на S:

$$|a_{ik}|\leqslant K \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ |V_i|\leqslant K\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Разрешая уравнения (9) относительно производных, мы видим, что правые части непрерывны при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и при любых значениях $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (но не остаются ограниченными при неограниченном возрастании этих последних переменных). Далее, условия Липшица выполняются при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и при любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$, так как частные производные по y_i суть коэффициенты a_{ik}, которые не зависят от $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и, по предположению, все ограничены на S. Доказанная в главе IV теорема существования позволяет утверждать, что система (8) [и (9), как её частный случай] имеет единственное решение $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$, принимающее при $x=x_0$, где $x_1 < x_0 < x_2$, любые

начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Это решение определено в некотором замкнутом интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, концы которого, однако, a priori могут не достигать концов отрезка $[x_1,\ x_2]$.

Мы можем уточнить теорему существования для линейной системы: *решение, определяемое начальными данными* $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, *существует во всём отрезке* S, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ *непрерывности коэффициентов и правых частей; последовательные приближения равномерно сходятся также во всём этом отрезке.*

Припомним, что ограничение $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ в обозначениях главы IV имело своей главной целью гарантировать, что ни одно приближение не выйдет из границ $(y_i^{(0)} - b,\ y_i^{(0)} + b)$; в рассмотренном случае эта предосторожность является излишней, так как область определения и непрерывности относительно всех y_i простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Могло бы составить затруднение лишь то обстоятельство, что мы заранее не знаем, как сильно возрастут m-ые последовательные приближения $y_i^{(m)}(x)$ при изменении x во всём отрезке S, и, следовательно, мы не можем ограничить абсолютные величины правых частей уравнений, разрешённых относительно производных, числом M, которое входило в оценки (8_1), $(8_2), \ldots, (8_m)$ главы IV. Поэтому при доказательстве уточнённой теоремы существования для линейных уравнений надо слегка изменить рассуждение.

Обозначим через L верхнюю грань абсолютных величин начальных значений:

$$|y_i^{(0)}| \leqslant L \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Последовательные приближения определяем так же, как и в главе IV. Пусть x изменяется в отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$. Мы будем иметь:

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(0)} + a_{i2}y_2^{(0)} + \ldots + a_{in}y_n^{(0)} - V_i)\,dx$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| \leqslant (nKL + K)\int_{x_0}^{x} dx = K(nL + 1)(x - x_0) \qquad (10_1)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

для любого значения x, $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$. Далее,

$$y_i^{(2)} = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(1)} + a_{i2}y_2^{(1)} + \ldots + a_{in}y_n^{(1)} - V_i)\,dx$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Оценим абсолютную величину $y_i^{(2)}-y_i^{(1)}$:

$$|y_i^{(2)}-y_i^{(1)}|=\left|\int_{x_0}^{x}[a_{i1}(y_1^{(1)}-y_1^{(0)})+\ldots+a_{in}(y_n^{(1)}-y_n^{(0)})]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}\{|a_{i1}|\cdot|y_1^{(1)}-y_1^{(0)}|+\ldots+|a_{in}|\cdot|y_n^{(1)}-y_n^{(0)}|\}\,dx.$$

Замечая, что $|a_{ik}|\leqslant K$, и заменяя под интегралом $|y_i^{(1)}-y_i^{(0)}|$ их оценками (10_1), получаем:

$$|y_i^{(2)}-y_i^{(1)}|\leqslant nKK(nL+1)\int_{x_0}^{x}(x-x_0)\,dx=nKK(Ln+1)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} \qquad (10_2)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Далее, имеем подобным же образом при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$|y_i^{(3)}-y_i^{(2)}|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}[a_{i1}(y_1^{(2)}-y_1^{(1)})+a_{i2}(y_2^{(2)}-y_2^{(1)})+\ldots+a_{in}(y_n^{(2)}-y_n^{(1)})]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}\{|a_{i1}|\cdot|y_1^{(2)}-y_1^{(1)}|+\ldots+|a_{in}|\cdot|y_n^{(2)}-y_n^{(1)}|\}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(nK)^2K(nL+1)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\,dx=(nK)^2K(nL+1)\frac{(x-x_0)^3}{3!}. \qquad (10_3)$$

Методом полной индукции легко докажем такую оценку:

$$|y_i^{(m)}-y_i^{(m-1)}|\leqslant(nK)^{m-1}K(nL+1)\frac{(x-x_0)^m}{m!}. \qquad (10_m)$$

Итак, все члены рядов

$$y_i^{(0)}+(y_i^{(1)}-y_i^{(0)})+(y_i^{(2)}-y_i^{(1)})+\ldots+(y_i^{(m)}-y_i^{(m-1)})+\ldots \qquad \mathbf{(11)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

начиная со второго, меньше по абсолютной величине, чем члены сходящегося ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(nL+1)}{nK} \frac{[nK(x_2-x_0)]^m}{m!}$$

с постоянными положительными членами (мы заменили $x-x_0$ его наибольшим значением x_2-x_0). Следовательно, ряды (11) сходятся равномерно на интервале (x_0, x_2) и представляют непрерывные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. То, что эти функции удовлетворяют системе уравнений (8) и являются единственными решениями этой системы, доказывается так же, как в главе IV, § 1, 2. Аналогичные рассуждения устанавливают существование решения в отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Примечание 1. Если коэффициенты a_{ij} и правые части V_i непрерывны в открытом интервале (a, b) (где может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$), то приведённое рассуждение доказывает существование и единственность решения системы (8) в любом замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b). Беря последовательность замкнутых интервалов $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n], \ldots$, из которых каждый последующий заключает предыдущий, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = b$, мы определим решение в любом из этих интервалов $[\alpha_n, \beta_n]$, следовательно, в силу единственности решения, и в их сумме, т. е. во всём открытом интервале (a, b). Очевидно, функции, представляющие решение, будут непрерывными и удовлетворяющими системе (8) во всём интервале (a, b); в любом замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, содержащемся в (a, b), эти функции являются равномерно непрерывными, а последовательные приближения $y_i^{(m)}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — равномерно сходящимися при $m \to \infty$.

Примечание 2. Линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = V(x)$$

эквивалентно нормальной системе линейных уравнений специального вида:

$$\frac{dy}{dx} - y_1 = 0, \quad \frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0,$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} y_1 + a_n y = V(x).$$

Применяя доказанную теорему, мы получаем следующий результат: *линейное уравнение n-го порядка с коэффициентом при старшей производной, равным единице, имеет непрерывные и n раз дифференцируемые решения во всём открытом интервале, в котором коэффициенты и правая часть уравнения непрерывны.*

2. Линейные однородные системы. Такая система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0,\\ &\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0,\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Мы предполагаем, что коэффициенты a_{ik} непрерывны в интервале $a < x < b$.

Пусть частным решением системы (9) является система функций $y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)}(x)$, $\ldots$, $y_n^{(1)}(x)$, так что по подстановке в уравнения (9) эти функции обращают их в тождества. Легко видеть, что в таком случае *система функций* $Cy_1^{(1)}$, $Cy_2^{(1)}$, $\ldots$, $Cy_n^{(1)}$ *также является решением системы* (9). Далее, *если* $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, $\ldots$, $y_n^{(1)}$ *и* $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, $\ldots$, $y_n^{(2)}$ *суть два частных решения, то* $y_1^{(1)}+y_1^{(2)}$, $y_2^{(1)}+y_2^{(2)}$, $\ldots$, $y_n^{(1)}+y_n^{(2)}$ *также является решением системы* (9).

Пусть мы имеем n частных решений:

$$\left.\begin{aligned} &y_1^{(1)},\; y_2^{(1)},\; \ldots,\; y_n^{(1)},\\ &y_1^{(2)},\; y_2^{(2)},\; \ldots,\; y_n^{(2)},\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &y_1^{(n)},\; y_2^{(n)},\; \ldots,\; y_n^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Назовём систему решений (12) *фундаментальной, если определитель*

$$D=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} y_2^{(1)} \ldots y_n^{(1)}\\ y_1^{(2)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(2)}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ y_1^{(n)} y_2^{(n)} \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{12'}$$

не равен тождественно нулю в интервале (a, b). *Фундаментальные системы существуют*: достаточно взять n^2 чисел $b_i^{(k)}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ таких, чтобы их определитель D_0 был не равен нулю; затем определим n частных решений $y_1^{(k)}(x)$, $y_2^{(k)}(x)$, $\ldots$, $y_n^{(k)}(x)$, принимающих при $x=x_0$ (где x_0 — некоторая точка интервала $a<x<b$) начальные значения $y_1^{(k)}(x_0)=b_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}(x_0)=b_2^{(k)}$, $\ldots$, $y_n^{(k)}(x_0)=b_n^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда, в силу непрерывности функций y_i^k, определитель D

будет отличен от нуля также в некотором интервале, окружающем точку x_0. Мы можем доказать больше.

ТЕОРЕМА. *Если* $D(x_0) \neq 0$, *то* $D(x)$ *не обращается в* 0 *ни в какой точке интервала* (a, b).

Для доказательства вычислим производную $D'(x)$; дифференцируем по столбцам:

$$D'(x) = \begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & \frac{dy_2^{(1)}}{dx} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & \frac{dy_2^{(2)}}{dx} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & \frac{dy_2^{(n)}}{dx} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & \frac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Заменив в каждом определителе в правой части производные $\frac{dy_i^{(k)}}{dx}$ их выражениями из уравнений (9), мы получим, например, для первого слагаемого:

$$-a_{11} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} y_2^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - \ldots$$

$$\ldots - a_{1n} \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_{11}D(x),$$

так как все определители, кроме первого, имеют по два равных столбца. Аналогично, второе слагаемое даёт $-a_{22}D(x)$, ..., n-е сла-

гаемое даёт $-a_{nn}D(x)$. Итак, имеем:

$$D'(x) = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\,D(x),$$

или

$$\frac{D'}{D} = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}),$$

откуда

$$D(x) = D_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\,dx}.$$

Следовательно, если $D_0 \neq 0$, то $D(x) \neq 0$ во всём интервале, где коэффициенты a_{ii} (а следовательно, и решения) непрерывны, т. е. в интервале (a, b).

ТЕОРЕМА. *Если $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ образуют фундаментальную систему частных решений системы* (9), *то общее решение будет:*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из сказанного в начале этого раздела следует, что формулы (13) представляют решение системы. Чтобы доказать, что это решение общее, нужно показать, что постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно определить так, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут при $x = x_0$ удовлетворять начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

где $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — любые числа. Подставляя эти условия в выражения (13), мы получим для определения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ систему n линейных алгебраических уравнений:

$$C_1 y_i^{(1)}(x_0) + C_2 y_i^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_i^{(n)}(x_0) = y_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Так как, по доказанному, $D(x_0) \neq 0$, то система (14) имеет определённую систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Подставляя в формулы (13) найденные значения произвольных постоянных, мы и получим искомое частное решение. Теорема доказана.

Примечание 1. Мы определили фундаментальную систему (12) по формальному признаку — необращению в нуль определителя $D(x)$.

Естественно ввести определение линейной независимости системы функций: *систему функций вида* (12) *мы назовём линейно независимой, если*

не существует такой системы постоянных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (которые не все равны нулю), *что имели бы место в интервале* (a, b) *n тождеств*:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_2 y_1^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_1^{(n)} &= 0, \\ \alpha_1 y_2^{(1)} + \alpha_2 y_2^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_2^{(n)} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \alpha_1 y_n^{(1)} + \alpha_2 y_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В противном случае система функций (12) называется *линейно зависимой*.

Покажем, что *для n функций, дающих решение системы линейных дифференциальных уравнений, понятия фундаментальной системы и линейно независимой системы совпадают*. В самом деле, если система (12) линейно зависима, то, рассматривая равенства (15) как n алгебраических уравнений с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, мы находим, что так как не все α_i тождественно равны нулю, то определитель этой системы равен нулю, притом для всякого значения x, т. е. $D(x) \equiv 0$. Обратно, если система решений (12) дифференциальных уравнений линейно независима, т. е. тождества (15) невозможны при постоянных α_i, которые не все равны нулю, то $D(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x. Допустим, в самом деле, что $D(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Тогда система (15), если в функции $y_i^{(k)}(x)$ подставить значение $x = x_0$, имеет систему решений $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$, которые не все равны нулю. Найдя эту систему, составим функции:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{\alpha}_1 y_1^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_1^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_1^{(n)}, \\ \bar{y}_2 &= \bar{\alpha}_1 y_2^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_2^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_2^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_n &= \bar{\alpha}_1 y_n^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_n^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_n^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти функции дают решение системы дифференциальных уравнений, так как они составлены из линейных комбинаций частных решений. Далее, эти функции, согласно определению величин α_i, удовлетворяют начальным условиям: $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \ldots = \bar{y}_n = 0$ при $x = x_0$.

В силу теоремы единственности, система (9) имеет только одно решение, удовлетворяющее данным начальным условиям; но очевидное (тривиальное) решение $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0, \ldots, y_n \equiv 0$ удовлетворяет начальным условиям — обращению в нуль всех функций при $x = x_0$; следовательно, решение $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ совпадает с тривиальным, и равенства (16) дают:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 y_1^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_1^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_1^{(n)} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \bar{\alpha}_1 y_n^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_n^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_n^{(n)} &= 0 \end{aligned}$$

тождественно для всякого x в интервале (a, b). Таким образом, мы получили линейную зависимость для системы (12), против предположения. Следовательно, $D(x) \neq 0$ ни для какого значения x в интервале (a, b).

Примечание 2. Задача построения системы линейных уравнений, имеющей заданную систему решений

$$y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \ldots,\ y_n^{(k)}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{12}$$

разрешается следующими формулами:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_i^{(1)}}{dx} & \frac{dy_i^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_i^{(n)}}{dx} \\ y_1 & y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, что коэффициентом при производных $\frac{dy_i}{dx}$ является $D(x)$, определённый формулой (12′); если $D(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b), то, деля на $D(x)$, получаем линейную систему уравнений в нормальной форме.

Пример 3. *Найти линейную однородную систему второго порядка*[1]*, допускающую следующую систему решений:*

$$y_1^{(1)} = e^x \cos x, \quad y_2^{(1)} = e^x \sin x;$$
$$y_1^{(2)} = -\sin x, \quad y_2^{(2)} = \cos x.$$

Искомые уравнения будут:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & e^x(\cos x - \sin x) & -\cos x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_2}{dx} & e^x(\sin x + \cos x) & -\sin x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

или, развёртывая определители по первому столбцу и деля оба уравнения на $D(x) = e^x$, получаем искомую систему:

$$\frac{dy_1}{dx} - \cos^2 x \cdot y_1 + (1 - \sin x \cdot \cos x)\, y_2 = 0,$$
$$\frac{dy_2}{dx} - (1 + \sin x \cdot \cos x)\, y_1 - \sin^2 x \cdot y_2 = 0.$$

---

[1]) Система n дифференциальных уравнений первого порядка называется системой n-го порядка, так как она может быть заменена одним уравнением n-го порядка.

3. Неоднородные системы линейных уравнений. Рассмотрим неоднородную систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=V_1,\\ &\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=V_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=V_n. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ТЕОРЕМА 1. *Если известно частное решение неоднородной системы* $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, …, $Y_n(x)$, *то нахождение общего решения этой системы приводится к решению соответствующей однородной системы* (9).

В самом деле, введём новые искомые функции z_i соотношениями:

$$y_1=Y_1+z_1,\quad y_2=Y_2+z_2,\ \ldots,\ y_n=Y_n+z_n.$$

Внеся эти выражения в уравнения (8) и принимая во внимание тождества

$$\frac{dY_i}{dx}+a_{i1}Y_1+a_{i2}Y_2+\ldots+a_{in}Y_n=V_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы получим для новых функций z_i систему

$$\frac{dz_i}{dx}+a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+\ldots+a_{in}z_n=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \qquad (9')$$

Теорема доказана.

Следствие. Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\begin{aligned} &y_1=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)}+\ldots+C_ny_1^{(n)}+Y_1,\\ &y_2=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)}+\ldots+C_ny_2^{(n)}+Y_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_n=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+Y_n, \end{aligned}$$

где Y_1, Y_2, …, Y_n — какое-нибудь частное решение неоднородной системы (8), а

$$y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)};\quad y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)};\ \ldots;\ y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \ldots,\ y_n^{(n)} \qquad (12)$$

суть n независимых частных решений соответствующей однородной системы (9); C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные. Доказа-

тельство аналогично доказательству соответствующей теоремы для линейного уравнения n-го порядка (см. главу V, § 3, 1).

ТЕОРЕМА 2. *Если известна фундаментальная система соответствующей однородной линейной системы, то решение неоднородной системы сводится к квадратурам.*

Если нам известны решения (12) системы (9), то её общее решение имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}, \end{array}\right\} \qquad (13)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные. Формулы (13) с постоянными C_i, очевидно, не дают решения неоднородной системы (8). Применим, как и в случае одного линейного уравнения, метод вариации постоянных. Будем рассматривать C_i как неизвестные функции от x, причём подберём их таким образом, чтобы выражения (13) являлись решениями неоднородной системы (систему уравнений (13) можно рассматривать как систему, вводящую n новых искомых функций от x: $C_1, C_2, \ldots, C_n$; в силу линейности преобразования, новые уравнения для C_i тоже будут линейными).

Дифференцируем равенства (13) по x:

$$\frac{dy_i}{dx} = C_1 \frac{dy_i^{(1)}}{dx} + C_2 \frac{dy_i^{(2)}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_i^{(n)}}{dx} + \\ + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_i^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (17)$$

Подставим выражения (17) и (13) в уравнения (8). Первые строки правых частей формул (17) имеют такой вид, как если бы C_i были постоянными; так как $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$ представляют решения однородной системы, то при подстановке эти члены дадут нули; в самом деле, результат подстановки в i-е уравнение даёт:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx} + a_{i1} \sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)} + \\ + a_{i2} \sum_{k=1}^{n} C_k y_2^{(k)} + \ldots + a_{in} \sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)} = V_i,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{dy_i^{(k)}}{dx} + a_{i1} y_1^{(k)} + \ldots + a_{in} y_n^{(k)} \right) + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = V_i,$$

и для определения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ остаются уравнения:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_1^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_1^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_1,\\
&y_2^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_2^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_n^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_n.
\end{aligned}$$

Полученная система линейных уравнений относительно $\frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_n}{dx}$ разрешима, так как определитель системы $D(x)\neq 0$, в силу предположения, что система n решений (12) является фундаментальной; мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{dC_1}{dx}=\frac{D_{11}V_1+D_{21}V_2+\ldots+D_{n1}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_1(x),\\
&\frac{dC_2}{dx}=\frac{D_{12}V_1+D_{22}V_2+\ldots+D_{n2}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dC_n}{dx}=\frac{D_{1n}V_1+D_{2n}V_2+\ldots+D_{nn}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_n(x),
\end{aligned}$$

где через D_{ik} $(i,\ k=1,\ 2, \ldots,\ n)$ обозначен минор определителя D, соответствующий элементу $y_i^{(k)}$. Так как $\varphi_i(x)$ являются известными функциями, то C_i получатся квадратурами:

$$C_i=\int\varphi_i(x)\,dx+\gamma_i\quad(i=1,\ 2, \ldots,\ n)$$

(γ_i — постоянные интеграции).

Подставляя найденные значения C_i в формулы (13), получаем общее решение системы (8) в виде:

$$\begin{aligned}
&y_1=\gamma_1y_1^{(1)}+\gamma_2y_1^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_1^{(n)}+Y_1\\
&y_2=\gamma_1y_2^{(1)}+\gamma_2y_2^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_2^{(n)}+Y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n=\gamma_1y_n^{(1)}+\gamma_2y_n^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_n^{(n)}+Y_n,
\end{aligned}$$

где частное решение неоднородной системы $Y_1,\ Y_2 \ldots,\ Y_n$ определено формулами:

$$Y_i(x)=y_i^{(1)}\int\varphi_1(x)\,dx+y_i^{(2)}\int\varphi_2(x)\,dx+\ldots+y_i^{(n)}\int\varphi_n(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}y_i^{(k)}\int\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}D_{lk}V_l}{D}\,dx.$$

Пример 4. $\frac{dy}{dx}-z=\cos x$, $\frac{dz}{dx}+y=1$. В примере 1 мы нашли решение соответствующей однородной системы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$, $z=-C_1\sin x+C_2\cos x$. Подставляем эти значения в данные уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями x. После приведения получим такую систему:

$$\frac{dC_1}{dx}\cos x+\frac{dC_2}{dx}\sin x=\cos x, \qquad -\frac{dC_1}{dx}\sin x+\frac{dC_2}{dx}\cos x=1,$$

откуда, разрешая относительно $\frac{dC_1}{dx}$ и $\frac{dC_2}{dx}$ и затем интегрируя, находим:

$$\frac{dC_1}{dx}=\cos^2 x-\sin x, \qquad C_1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\cos x+\gamma_1,$$

$$\frac{dC_2}{dx}=\sin x\cos x+\cos x, \qquad C_2=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\sin x+\gamma_2$$

(γ_1 и γ_2 — произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в выражения для y и z, получаем общее решение заданной неоднородной системы:

$$y=\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x+1,$$

$$z=-\gamma_1\sin x+\gamma_2\cos x-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x.$$

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Рассмотрим однородную линейную систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0,\\
&\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

в которой будем предполагать коэффициенты a_{ik} *постоянными*. Если систему (18) привести к одному уравнению высшего порядка, то, как легко видеть, получится линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому естественно искать решения системы (18) в виде показательных функций. Будем искать частное решение в таком виде:

$$y_1=\gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2=\gamma_2 e^{\lambda x}, \ldots, y_n=\gamma_n e^{\lambda x}, \tag{19}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и λ — постоянные, которые нужно определить так, чтобы выражения (19) удовлетворяли системе (18). Подставляя в систему (18) значения (19), сокращая на $e^{\lambda x}$ и собирая коэффициенты при $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}+\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}+\lambda)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} \quad (20)$$

Рассматривая (20) как систему n линейных однородных уравнений относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, мы замечаем, что для получения нетривиального решения (19) мы должны потребовать равенства нулю определителя системы (20), т. е. мы приходим к уравнению:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Наряду с определителем $\Delta(\lambda)$ нам в дальнейшем придётся часто рассматривать матрицу $M(\lambda)$, составленную из тех же элементов:

$$M(\lambda) \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+\lambda \end{Vmatrix}. \quad (21')$$

Придавая переменному λ значение λ_0, мы получим матрицу $M(\lambda_0)$.

Уравнение (21) есть уравнение n-й степени относительно λ; мы будем называть его *характеристическим уравнением*. Итак, решение вида (19) системы (18) может существовать только в том случае, когда λ есть корень характеристического уравнения. Могут представиться два случая.

1) Все n корней характеристического уравнения различны. Пусть эти корни будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Если один из этих корней λ_j подставить в $\Delta(\lambda)$, то мы получим $\Delta(\lambda_j) = 0$. Покажем, что по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка определителя $\Delta(\lambda)$ отличен от нуля при $\lambda = \lambda_j$. В самом деле, так как λ_j есть простой

корень уравнения (21), то $\left[\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \Delta'(\lambda_j) \neq 0$. Вычисляем $\Delta'(\lambda)$:

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}+\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1}+\lambda \end{vmatrix}$$

(в правой части стоит сумма диагональных миноров $(n-1)$-го порядка).

Подставляя вместо λ значение λ_j и вспоминая, что $\Delta'(\lambda_j) \neq 0$, мы получаем в результате, что по крайней мере один из входящих в последнюю сумму диагональных миноров $(n-1)$-го порядка не равен нулю при $\lambda = \lambda_j$. Наше утверждение доказано.

Возвращаемся к системе (20), в которой вместо λ подставим λ_j — один из корней характеристического уравнения. Определитель системы равен нулю; следовательно, система имеет отличные от нуля решения $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$. Но, по доказанному, ранг матрицы $M(\lambda_j)$ коэффициентов системы (20) равен $n-1$; следовательно, неизвестные $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$ определяются с точностью до произвольного множителя пропорциональности (в качестве $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$ можно взять миноры любой строки определителя $\Delta(\lambda_j)$, для которой они не все равны нулю).

Итак, мы получим (обозначая этот множитель через C_j):

$$\gamma_1^{(j)} = C_j k_1^{(j)},\ \gamma_2^{(j)} = C_j k_2^{(j)},\ \dots,\ \gamma_n^{(j)} = C_j k_n^{(j)},$$

где $k_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ суть известные числа. Итак, корню $\lambda = \lambda_j$ соответствует частное решение системы (18) (мы полагаем $C_j = 1$):

$$y_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda_j x},\ y_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda_j x},\ \dots,\ y_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda_j x}. \tag{22}$$

Ясно значение множителя C_j: мы знаем, что если систему частных решений помножить на одно и то же произвольное постоянное, то получаем опять решение системы однородных линейных уравнений. Применяя приведённые рассуждения ко всем корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения, мы получим n частных решений вида (22) для $j=1, 2, \ldots, n$.

После этого мы можем написать полное решение системы (18) в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Примечание 1. Если коэффициенты уравнения действительны, а некоторые корни характеристического уравнения окажутся мнимыми, то они будут входить попарно сопряжёнными, например:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Соответствующие решения будут иметь вид:

$$y_j^{(1)} = k_j^{(1)} e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_j^{(2)} = k_j^{(2)} e^{(\alpha-\beta i)x} \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты $k_j^{(1)}$ и $k_j^{(2)}$ тоже окажутся комплексными сопряжёнными, если взять их равными минорам одной и той же строки определителей $\Delta(\alpha+\beta i)$ и $\Delta(\alpha-\beta i)$. Легко убедиться в том, что корням $\lambda = \alpha \pm \beta i$ будут соответствовать две системы решений, соответствующих действительной и мнимой части $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$, вида:

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}\left(l_j^{(1)} \cos\beta x - l_j^{(2)} \sin\beta x\right), \qquad \tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}\left(l_j^{(1)} \sin\beta x + l_j^{(2)} \cos\beta x\right),$$

где $l_j^{(1)}$ и $l_j^{(2)}$ — действительные числа, определяемые из равенств $k_j^{(1)} = l_j^{(1)} + i l_j^{(2)}$, $k_j^{(2)} = l_j^{(1)} - i l_j^{(2)}$.

Пример 5. $\dfrac{dy}{dx} + 7y - z = 0$, $\dfrac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0$. Ищем решение в виде $y = \gamma_1 e^{\lambda x}$, $z = \gamma_2 e^{\lambda x}$; подставляя в заданную систему, получаем уравнения:

$$\gamma_1(\lambda+7) - \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + (\lambda+5)\gamma_2 = 0.$$

Условие их совместности даёт характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda+7 & -1 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Корни характеристического уравнения суть: $\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6 - i$. Подставляя первый из этих корней в систему для определения γ_1 и γ_2, получаем два уравнения:

$$\gamma_1 (1 + i) - \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + (-1 + i)\gamma_2 = 0,$$

из которых одно является следствием другого. Мы можем взять $k_1^{(1)} = 1$, $k_2^{(1)} = 1 + i$. Первая система частных решений есть

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}, \quad y_2^{(1)} = (1 + i)\, e^{(-6+i)x}.$$

Аналогично, подставляя корень $\lambda_2 = -6 - i$, найдём вторую систему частных решений:

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)x}, \quad y_2^{(2)} = (1 - i)\, e^{(-6-i)x}.$$

Беря в качестве новой фундаментальной системы решения

$$\tilde{y}_i^{(1)} = \frac{y_i^{(1)} + y_i^{(2)}}{2}, \quad \tilde{y}_i^{(2)} = \frac{y_i^{(1)} - y_i^{(2)}}{2i} \quad (i = 1,\ 2),$$

находим:

$$\tilde{y}_1^{(1)} = e^{-6x} \cos x, \quad \tilde{y}_1^{(2)} = e^{-6x} \sin x;$$

$$\tilde{y}_2^{(1)} = e^{-6x} (\cos x - \sin x), \quad \tilde{y}_2^{(2)} = e^{-6x} (\cos x + \sin x).$$

Общим решением будет:

$$y_1 = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$y_2 = e^{-6x} [(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x].$$

Примечание 2. Полученные нами n решений (22) являются линейно независимыми. В самом деле, рассмотрим таблицу (12). В нашем случае $y_i^{(j)} = k_i^{(j)} e^{\lambda_j x}$. Допустим, что в силу определения линейной зависимости, выполняются соотношения (15), причём не все $\alpha_j = 0$. С другой стороны, в каждой строке системы, например j-й, найдётся коэффициент $k_i^{(j)} \neq 0$, иначе j-е частное решение было бы тривиальным.

В силу допущения, мы имеем:

$$\alpha_1 k_i^{(1)} e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 k_i^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_j k_i^{(j)} e^{\lambda_j x} + \ldots + \alpha_n k_i^{(n)} e^{\lambda_n x} = 0.$$

Так как, по доказанному в главе VI, функции $e^{\lambda_j x}$ линейно независимы ($j = 1, 2, \ldots, n$), то все коэффициенты в последнем соотношении равны нулю, в частности $\alpha_j k_i^{(j)} = 0$.

В силу условия, не все $k_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) равны нулю; следовательно, $\alpha_j = 0$.

Это рассуждение применимо ко всем значениям $j = 1, 2, \ldots, n$; таким образом, все α_j равны нулю. Полученное противоречие доказывает линейную независимость решений (22).

2) Среди корней уравнения (21) есть кратные. Пусть λ_1 есть m-кратный корень характеристического уравнения. В таком случае значение m-й производной от $\Delta(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ $\Delta^{(m)}(\lambda_1)\neq 0$, и рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что среди миноров порядка $n-m$ определителя $\Delta(\lambda)$ по крайней мере один отличен от нуля при $\lambda=\lambda_1$. Отсюда следует, что для ранга r матрицы $\boldsymbol{M}(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ имеет место неравенство $r\geqslant n-m$. Система линейных алгебраических уравнений (20) сводится к r независимым уравнениям. Из теории линейных уравнений известно, что в этом случае в общем решении системы (20) $n-r$ неизвестных остаются произвольными; пусть это будут $\gamma_1=C_1$, $\gamma_2=C_2$, ..., $\gamma_{n-r}=C_{n-r}$; остальные r неизвестных $\gamma_{n-r+1}, \gamma_{n-r+2}, \ldots, \gamma_n$ выразятся в виде линейных форм относительно $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$; пусть эти выражения будут:

$$\gamma_j=k_j^{(1)}C_1+k_j^{(2)}C_2+\ldots+k_j^{(n-r)}C_{n-r}$$

$$(j=n-r+1,\ n-r+2,\ \ldots,\ n).$$

Мы получим такую систему решений, зависящую от $n-r$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$:

$$y_1=C_1e^{\lambda_1x},\ y_2=C_2e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_{n-r}=C_{n-r}e^{\lambda_1x},$$

$$y_{n-r+1}=(k_{n-r+1}^{(1)}C_1+k_{n-r+1}^{(2)}C_2+\ldots+k_{n-r+1}^{(n-r)}C_{n-r})e^{\lambda_1x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n=(k_n^{(1)}C_1+k_n^{(2)}C_2+\ldots+k_n^{(n-r)}C_{n-r})\,e^{\lambda_1x}.$$

Таким образом, одному корню $\lambda=\lambda_1$ кратности m соответствует $n-r\leqslant m$ частных решений, которые мы получаем, полагая $C_i=1$ для $i=1, 2, \ldots, n-r$, а все прочие C_j равными нулю ($C_j=0$ при $j\neq i$):

$$\left.\begin{aligned}
&y_1^{(1)}=e^{\lambda_1x},\ y_2^{(1)}=0,\ \ldots,\ y_{n-r}^{(1)}=0,\\
&\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(1)}=k_{n-r+1}^{(1)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(1)}=k_n^{(1)}e^{\lambda_1x},\\
&y_1^{(2)}=0,\ y_2^{(2)}=e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_{n-r}^{(2)}=0,\\
&\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(2)}=k_{n-r+1}^{(2)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(2)}=k_n^{(2)}e^{\lambda_1x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-r)}=0,\ y_2^{(n-r)}=0,\ \ldots,\ y_{n-r}^{(n-r)}=e^{\lambda_1x},\\
&\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(n-r)}=k_{n-r+1}^{(n-r)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(n-r)}=k_n^{(n-r)}e^{\lambda_1x}.
\end{aligned}\right\}\qquad(22')$$

Матрица из коэффициентов при $e^{\lambda_1 x}$ в правых частях этих равенств имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-r+1}^{(1)} & \dots & k_n^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & k_{n-r+1}^{(2)} & \dots & k_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & k_{n-r+1}^{(n-r)} & \dots & k_n^{(n-r)} \end{matrix} \right\|.$$

Её ранг, очевидно, и равен $n-r$, т. е. между строками системы (22′) нет линейной зависимости; значит, мы получили систему $n-r$ линейно независимых решений, соответствующих корню $\lambda=\lambda_1$. Если $r=n-m$, т. е. если ранг матрицы $M(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ имеет наименьшее значение, то полученное число решений равно кратности m корня λ_1, и, таким образом, получены все решения, соответствующие этому корню (если $m=1$, то $r=n-1$, $n-r=1$, и мы возвращаемся к случаю простого корня λ_1, которому соответствует одно решение системы).

Если ранг r матрицы $M(\lambda_1)$ больше $n-m$, то число $n-r$ полученных указанным способом решений будет меньше кратности m корня λ_1. Чтобы найти недостающие решения, мы должны, как в случае одного уравнения n-го порядка, искать решения в виде линейных комбинаций функций $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$.

Пример 6. $\frac{dx}{dt}=y+z$, $\frac{dy}{dt}=z+x$, $\frac{dz}{dt}=x+y$. Ищем решения в форме $x=k_1e^{\lambda t}$, $y=k_2e^{\lambda t}$, $z=k_3e^{\lambda t}$. Для определения k_1, k_2, k_3 имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda k_1-k_2-k_3&=0, \\ -k_1+\lambda k_2-k_3&=0, \\ -k_1-k_2+\lambda k_3&=0. \end{aligned}$$

Приравнивая их определитель нулю, получаем:

$$0=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2.$$

Корни последнего уравнения суть $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$. Простому корню $\lambda_1=2$ соответствует система двух независимых уравнений для k_1, k_2, k_3, например:

$$2k_1-k_2-k_3=0, \quad -k_1+2k_2-k_3=0,$$

откуда

$$k_1:k_2:k_3=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1:1:1.$$

Отсюда получаем первую систему решений, содержащую одно произвольное постоянное:

$$x=C_1e^{2t}, \quad y=C_1e^{2t}, \quad z=C_1e^{2t}.$$

Если в матрицу $M(\lambda)$ вставить $\lambda=-1$, то её ранг окажется равным 1, и три уравнения для определения k_1, k_2, k_3 сведутся к одному:

$$k_1+k_2+k_3=0.$$

Если мы положим $k_1=C_2$, $k_2=C_3$, то $k_3=-(C_2+C_3)$, и мы получим ещё систему решений с двумя произвольными постоянными.

Общим решением будет:

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}, \quad y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}, \quad z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)\,e^{-t}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений, так как определитель

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Анализ всех возможных случаев, которые могут представиться для линейной системы с постоянными коэффициентами, проводится путём линейной замены зависимых переменных, которая приводит систему к канонической форме. Это приведение существенно связано с теорией элементарных делителей λ-матрицы (21′) [1]).

Нам удобно теперь писать данную линейную систему в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Для удобства введём ещё обозначения: $\dfrac{dy_i}{dx}\equiv Y_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$. После этого умножим уравнения (23) соответственно на систему вспомогательных переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и сложим почленно. В левой части мы получим *билинейную форму* переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_iY_i, \tag{24}$$

а справа — билинейную форму переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_iy_k. \tag{25}$$

Заметим, что матрица из коэффициентов формы (24) есть единичная матрица E, т. е. матрица, у которой диагональные элементы суть единицы, а все прочие — нули; матрица формы (25),

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

---

[1]) См., например, А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, гл. V, Гостехиздат, 1948.

есть матрица, составленная из коэффициентов правых частей дифференциальных уравнений (23). Таким образом, задание двух билинейных форм (24) и (25), из которых первая — с единичной матрицей, равносильно заданию системы дифференциальных уравнений (23).

Если мы, далее, подвергнем переменные y_i линейному преобразованию с постоянными коэффициентами:

$$y_i = \alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \ldots + \alpha_{in}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

то, ввиду значения переменных Y_i как производных от y_i, они подвергнутся тому же преобразованию:

$$Y_i = \alpha_{i1}Z_1 + \alpha_{i2}Z_2 + \ldots + \alpha_{in}Z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26'}$$

где $Z_i = \dfrac{dz_i}{dx}$.

Составим матрицу $A - \lambda E$, или, в раскрытом виде,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

По теореме о парах билинейных форм [1]), *две билинейные формы* (25) и (24) *эквивалентны другой паре билинейных форм* φ, ψ *тогда и только тогда, когда матрица* (27) *и матрица формы* $\varphi - \lambda\psi$ *имеют одни и те же элементарные делители* (при этом матрица ψ должна быть не особенной, т. е. её определитель $\neq 0$) [2]).

---

[1]) А. И. Мальцев, цитированная книга, п. 109.

[2]) Элементарные делители матрицы вида (27), — а мы только с такими матрицами встретимся в нашей теории, — могут быть определены следующим образом. Обозначим через $D_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ общий наибольший делитель всех определителей порядка i матрицы (27), рассматриваемых как многочлены относительно λ. Тогда доказывается, что: (А) многочлен $D_i(\lambda)$ делится на $D_{i-1}(\lambda)$ $(i \geqslant 2)$. Введём обозначения $\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} = E_i(\lambda)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $E_1(\lambda) = D_1(\lambda)$ и назовём $E_i(\lambda)$ *инвариантным множителем* матрицы (27). Очевидно, $D_i(\lambda) = E_1(\lambda)E_2(\lambda)\ldots E_i(\lambda)$. Далее доказывается, что: (В) в ряде инвариантных множителей $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_n(\lambda)$ каждый делится на все предыдущие. Напишем разложение инвариантных множителей на линейные факторы: $E_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{i1}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{i2}}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{e_{is}}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные корни уравнения, полученного приравниванием нулю определителя матрицы (27); очевидно, $e_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, s)$; кроме того, в силу свойства (В), $e_{ij} \leqslant e_{i'j}$, если $i < i'$. Те из двучленов

$$\begin{matrix} (\lambda - \lambda_1)^{e_{11}}, & (\lambda - \lambda_1)^{e_{21}}, & \ldots, & (\lambda - \lambda_1)^{e_{n1}}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\lambda - \lambda_s)^{e_{1s}}, & (\lambda - \lambda_s)^{e_{2s}}, & \ldots, & (\lambda - \lambda_s)^{e_{ns}}, \end{matrix}$$

которые не равны постоянному (т. е. для которых $e_{ij} > 0$), называются *элементарными делителями* матрицы (27). Делители из первой строки соответствуют корню $\lambda_1, \ldots$, делители из последней соответствуют корню λ_s. Число e_{ij} называется *степенью* элементарного делителя. Для простоты в дальнейшем будем обозначать число элементарных делителей через k, а сами делители — через $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_k)^{e_k}$, причём среди чисел λ_i могут быть и равные.

Пусть элементарные делители матрицы (27) будут:

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ \ldots\ (\lambda-\lambda_k)^{e_k}, \tag{28}$$

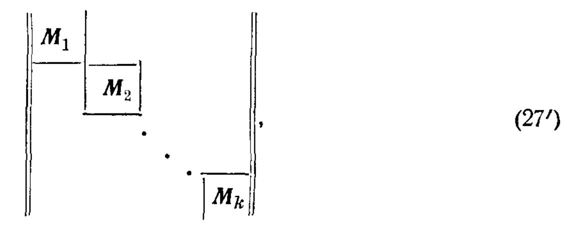
где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корни детерминантного уравнения матрицы (27), т. е. характеристического уравнения системы (23), может быть и равные, но соответствующие различным элементарным делителям, и

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = n.$$

В качестве матрицы формы ψ в новых переменных v_i, Z_i мы возьмём опять единичную матрицу E (очевидно, неособенную), т. е. положим:

$$\psi = v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + \ldots + v_n Z_n. \tag{24'}$$

В качестве билинейной формы φ мы возьмём такую форму переменных v_i и z_i, чтобы матрица формы обладала теми же элементарными делителями (28), что и $A-\lambda E$, но чтобы эта матрица имела нормальную форму [1])



$$\begin{Vmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{Vmatrix}, \tag{27'}$$

где вне квадратов M_i все элементы суть нули, а каждый квадрат составлен из следующих элементов [2]):

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} \lambda_i-\lambda & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i-\lambda & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda_i-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \lambda_i-\lambda \end{Vmatrix}}_{e_i \text{ столбцов}}. \tag{27''}$$

---

[1]) См. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, § 21, Гостехиздат, 1948.

[2]) Легко убедиться, используя данное в сноске на стр. 291 определение элементарных делителей, в том, что матрица (27′) имеет требуемые элементарные делители. В самом деле, выпишем частичные матрицы M_i, принимая во внимание возможные кратные корни, так что в новом обозначении матрица M_{ij} будет соответствовать корню λ_i, иметь вид (27″) и содержать по e_{ij} строк и столбцов. Заметим, что минор определителя матрицы M_{ij}, соответствующий левому нижнему элементу, равен 1, а все прочие или равны нулю или содержат множитель $\lambda-\lambda_i$. Поэтому наименьшая степень, в какой $\lambda-\lambda_1$ войдёт в миноры $(n-1)$-го порядка матрицы (27), есть $(\lambda-\lambda_1)^{e_{12}+e_{13}+\cdots}$; в этой степени $\lambda-\lambda_1$ войдёт в $D_{n-1}(\lambda)$; следовательно, он войдёт в $E_1(\lambda)$ в степени $(\lambda-\lambda_1)^{e_1}$. Далее, из миноров $(n-2)$-го порядка наименьшая степень $\lambda-\lambda_1$ будет у того, который получился вычёркиванием последней строки и первого столбца у определителей матриц M_{11} и M_{12}; эта степень равна $(\lambda-\lambda_1)^{e_{13}+\cdots}$, следовательно, $E_2(\lambda)$ содержит степень двучлена $(\lambda-\lambda_1)^{e_2}$. Продолжая это рассуждение, мы получаем указанный результат.

Таким образом, форма φ имеет следующий вид:

$$\varphi \equiv \left(\sum_{1}^{e_1} \lambda_1 v_i z_i + \sum_{2}^{e_1} v_{i-1} z_i\right) + \left(\sum_{e_1+1}^{e_1+e_2} \lambda_2 v_i z_i + \sum_{e_1+2}^{e_1+e_2} v_{i-1} z_i\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\sum_{n-e_k+1}^{n} \lambda_k v_i z_i + \sum_{n-e_k+2}^{n} v_{i-1} z_i\right). \qquad (29)$$

В силу определения эквивалентных пар матриц, существует подстановка (26), а также (26′) с определителем, отличным от нуля, и другая линейная подстановка с не равным нулю определителем, преобразующая вспомогательные переменные u_i в переменные v_i, при которых формы (24) и (25) перейдут, соответственно, в формы (24′) и (29).

Но, в силу сделанного выше замечания, две билинейные формы такого вида, как (24′) и (29), однозначно определяют систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Итак, после преобразования переменных (26) исходная система дифференциальных уравнений (23) перейдёт в следующую систему нормальной формы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + z_2,\\
\frac{dz_2}{dx} &= \lambda_1 z_2 + z_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{e_1-1}}{dx} &= \lambda_1 z_{e_1-1} + z_{e_1},\\
\frac{dz_{e_1}}{dx} &= \lambda_1 z_{e_1},
\end{aligned}\right\} \qquad (30_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_{n-e_k+1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-e_k+1} + z_{n-e_k+2},\\
\frac{dz_{n-e_k+2}}{dx} &= \lambda_k z_{n-e_k+2} + z_{n-e_k+3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{n-1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-1} + z_n,\\
\frac{dz_n}{dx} &= \lambda_k z_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (30_k)$$

Каждая из систем $(30_1), \ldots, (30_k)$ интегрируется независимо; легко дать формулы их общих решений. Так, например, если в системе (30_1) ввести новые функции $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{e_1}$, связанные с функциями $z_1, z_2, \ldots, z_{e_1}$ соотношениями

$$z_i = e^{\lambda_1 x} \zeta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, e_1),$$

то преобразованная система примет вид:

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta_2, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = \zeta_3, \quad \ldots, \quad \frac{d\zeta_{e_1-1}}{dx} = \zeta_{e_1}, \quad \frac{d\zeta_{e_1}}{dx} = 0.$$

Её интеграция даёт:

$$\zeta_{e_1} = C_1,\ \zeta_{e_1-1} = C_1x + C_2,\ \dots$$

$$\dots,\ \zeta_2 = C_1\frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + C_2\frac{x^{e_1-3}}{(e_1-3)!} + \dots + C_{e_1-2}x + C_{e_1-1},$$

$$\zeta_1 = C_1\frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!} + C_2\frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + \dots + C_{e_1-1}x + C_{e_1}.$$

Возвращаясь к переменным z_i, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} z_{e_1} = C_1e^{\lambda_1x},\ z_{e_1-1} = e^{\lambda_1x}(C_1x+C_2),\ \dots \\ \dots,\ z_1 = e^{\lambda_1x}\left(C_1\frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!} + C_2\frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + \dots + C_{e_1}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (31_1)$$

Аналогичные формулы $(31_2), \dots, (31_k)$ получатся для групп уравнений $(30_2), \dots$ $\dots, (30_k)$. При интеграции войдёт $e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$ произвольных постоянных C_i. Легко убедиться в том, что система частных решений, соответствующая системам значений произвольных постоянных

$$\begin{aligned} C_1 = 1,\quad C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0, \\ C_2 = 1,\quad C_1 = C_3 = \dots = C_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = 1,\quad C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

является линейно независимой. В самом деле, эта система частных решений имеет вид:

$$z_1^{(1)} = e^{\lambda_1x}\frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!},\quad z_2^{(1)} = e^{\lambda_1x}\frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!},\ \dots,\ z_{e_1-1}^{(1)} = e^{\lambda_1x}x,\quad z_{e_1}^{(1)} = e^{\lambda_1x},$$

$$z_{e_1+1}^{(1)} = \dots = z_n^{(1)} = 0,$$

$$z_1^{(2)} = e^{\lambda_1x}\frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!},\quad z_2^{(2)} = z^{\lambda_1x}\frac{x^{e_1-3}}{(e_1-3)!},\ \dots,\ z_{e_1-1}^{(2)} = e^{\lambda_1x},$$

$$z_{e_1}^{(2)} = z_{e_1+1}^{(2)} = \dots = z_n^{(2)} = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_1^{(e_1)} = e^{\lambda_1x},\quad z_2^{(e_1)} = z_3^{(e_1)} = \dots = z_n^{(e_1)} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_1^{(n)} = e^{\lambda_kx},\quad z_2^{(n)} = z_3^{(n)} = \dots = z_n^{(n)} = 0.$$

Подставляя эти значения в определитель (12′), мы получаем:

$$D = \pm e^{e_1\lambda_1x + e_2\lambda_2x + \dots + e_k\lambda_kx} \neq 0$$

Так как искомые функции y_i выражаются через z_i линейно при помощи формул (26) с определёнными коэффициентами α_{ik} и с определителем, отличным от нуля, то, подставляя в эти формулы найденные для z_i значения (31_1), (31_2), ..., (31_k), мы получим полное решение системы (23), содержащее n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Примечание. Одно линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = -a_n y - a_{n-1}y_1 - \ldots - a_1 y_{n-1}.$$

Для этой системы матрица (27) имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1-\lambda \end{array} \right\|. \qquad (27''')$$

Разлагая соответствующий определитель по последней строке и приравнивая нулю, получаем:

$$D_n(\lambda) = (a_1 + \lambda)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

т. е. известное нам из главы VI характеристическое уравнение. Рассмотрим элементарные делители матрицы (27'''). Минор определителя матрицы (27'''), соответствующий элементу первого столбца и последней строки, есть 1; следовательно, общий наибольший делитель всех миноров $(n-1)$-го порядка $D_{n-1}(\lambda) = 1$. Поэтому $E_1 = D_n(\lambda)$, $E_2 = E_3 = \ldots = 1$. Таким образом, элементарные делители матрицы (27''') будут:

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \quad (\lambda - \lambda_2)^{e_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_k)^{e_k},$$

где все λ_i различны между собой: каждому корню соответствует только один элементарный делитель. Из вышеизложенной теории следует, что каждому корню λ_i будет соответствовать группа решений вида $e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$, ..., $x^{e_i - 1}e^{\lambda_i x}$, как мы уже видели в главе VI. Таким образом, система дифференциальных уравнений, в которой хоть одному корню уравнения $D_n(\lambda) = 0$ соответствует более одного элементарного делителя, не может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

Из всей этой теории следует, что решения нормальной системы уравнений с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y_j = P_{ij}(x)e^{\lambda_i x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (32)$$

где $P_{ij}(x)$ — многочлен степени, не большей, чем $m_i - 1$, где m_i — кратность корня λ_i уравнения (21). Практический приём для нахождения общего решения такого уравнения — составить для каждого корня выражения вида (32) с неопределёнными коэффициентами. Подставляя эти выражения в систему (18), мы получим для неопределённых коэффициентов систему линейных уравнений. Число неизвестных, остающихся произвольными при решении этой системы, равно кратности корня.

Пример 7. Решить систему: $\frac{dx}{dt} + x - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + y - 4z = 0$, $\frac{dz}{dt} + 4z - x = 0$.

Уравнение (21) имеет вид:

$$0 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2.$$

Решения, соответствующие простому корню $\lambda = 0$, пишем в виде $x = a$, $y = b$, $z = c$. Вставляя эти значения в данную систему, получаем для определения a, b, c три уравнения, которые, согласно общей теории, сводятся к двум независимым, например к уравнениям:

$$a - b = 0,$$
$$b - 4c = 0.$$

Полагая $c = C_1$ (произвольному постоянному), находим систему решений, соответствующую корню $\lambda = 0$:

$$x = 4C_1,$$
$$y = 4C_1,$$
$$z = C_1.$$

Корень $\lambda = -3$ двукратный, причём $\lambda + 3$ не является делителем всех миноров второго порядка; поэтому ищем соответствующие этому корню решения в виде:

$$x = e^{-3t}(a_1 + a_2 t),$$
$$y = e^{-3t}(b_1 + b_2 t),$$
$$z = e^{-3t}(c_1 + c_2 t).$$

Подставляя в заданную систему и сокращая на общий множитель e^{-3t}, получаем:

$$-3a_1 - 3a_2 t + a_2 + a_1 + a_2 t - b_1 - b_2 t = 0,$$
$$-3b_1 - 3b_2 t + b_2 + b_1 + b_2 t - 4c_1 - 4c_2 t = 0,$$
$$-3c_1 - 3c_2 t + c_2 + 4c_1 + 4c_2 t - a_1 - a_2 t = 0.$$

Приравнивая в обеих частях свободные члены и коэффициенты при t, получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned} -2a_1+a_2-\ b_1&=0, & -2a_2-\ b_2&=0,\\ -2b_1+b_2-4c_1&=0, & -2b_2-4c_2&=0,\\ c_1+c_2-\ a_1&=0, & c_2-\ a_2&=0. \end{aligned}$$

Из трёх уравнений правого столбца получаем: $a_2=C_2$ (произвольное постоянное), $b_2=-2C_2$, $c_2=C_2$. После этого первые три уравнения дают:

$$a_1=C_3,\quad b_1=C_2-2C_3,\quad c_1=C_3-C_2.$$

Таким образом, общее решение системы будет:

$$\begin{aligned} x&=4C_1+C_2te^{-3t}+C_3e^{-3t},\\ y&=4C_1+C_2(-2t+1)e^{-3t}-2C_3e^{-3t},\\ z&=C_1+C_2(t-1)e^{-3t}+C_3e^{-3t}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ.

179. Найти четвёртые приближения для системы $\frac{dy}{dx}=-z$, $\frac{dz}{dx}=y$ при начальных данных: $y=1$, $z=0$ при $x=0$.

180. Дано уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}=y^2+x$. Найти третье приближение для y при начальных условиях: $y_0=0$, $y_0'=1$ при $x=0$.

181. Найти для решения уравнения $y''+2y'+y^2=0$ четвёртое приближение при начальных данных: $y_0=1$, $y_0'=0$ при $x=0$.

Найти общие решения систем:

182. $\frac{dy}{dx}=\frac{z^2}{y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y^2}{z}$.

183. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{y}$.

184. $\frac{dx}{dt}=-x+y+z$, $\frac{dy}{dt}=x-y+z$, $\frac{dz}{dt}=x+y-z$.

185. $\frac{dx}{dt}+x+y=t^2$, $\frac{dy}{dt}+y+z=2t$, $\frac{dz}{dt}+z=t$.

186. $\frac{dx}{dt}+5x+y=7e^t-27$, $\frac{dy}{dt}-2x+3y=-3e^t+12$.

187. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}-2z=e^{2x}$, $\frac{dz}{dx}+2\frac{dy}{dx}-3y=0$.

188. $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t}$.

189. $\frac{dy}{dx}+\frac{2z}{x^2}=1$, $\frac{dz}{dx}+y=x$.

190. $t\frac{dx}{dt}-x-3y=t$, $t\frac{dy}{dt}-x+y=0$.

Указание. Чтобы привести к постоянным коэффициентам, надо сделать замену независимого переменного.

191. $t\frac{dx}{dt}+6x-y-3z=0,\ t\frac{dy}{dt}+23x-6y-9z=0,$

$t\frac{dz}{dt}+x+y-2z=0.$

192. $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\ \frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t}.$

§ 3. Существование производных по начальным значениям от решений системы.

1. Мы уже ссылались (глава II, § 1, 4) на теорему о возможности дифференцировать решение одного дифференциального уравнения (или их системы) по начальным данным.

В настоящем разделе мы докажем эту теорему. Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; \lambda) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

являются непрерывными функциями переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ и параметра λ в области

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y_i-y_i^0|\leqslant b \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad \lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1, \tag{34}$$

и если в той же области непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

то решение, определённое начальными данными $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, является непрерывной функцией параметра λ при $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$.

Для доказательства заметим, что из условия непрерывности функций f_i в области (34) следует их ограниченность в этой области:

$$|f_i|\leqslant M \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

а из непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ следует также их ограниченность:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right|\leqslant K \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Последние неравенства влекут за собой выполнение условий Липшица для функций f_i по отношению к аргументам $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$|f_i(x, y_1', \ldots, y_n'; \lambda)-f_i(x, y_1'', \ldots, y_n''; \lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1'-y_1''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного значения параметра λ между λ_1 и λ_2 и для значений x в интервале

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h, \qquad h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

последовательные приближения, получаемые по методу Пикара,

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(m)}(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0;\ \lambda) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)};\ \lambda)\,dx \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\quad m = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

будут сходиться равномерно как по отношению к x, так и по отношению к параметру λ. Пределы этих последовательностей при $m \to \infty$ дадут, как мы знаем, решение системы (33):

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0;\ \lambda); \tag{35'}$$

так как все члены последовательностей (35) являются, очевидно, непрерывными функциями от λ, то то же справедливо, в силу равномерной сходимости, и для предельных функций (35′), что и доказывает лемму.

2. Переходим к основной теореме настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

допускают в области D:

$$|x - \bar{x}_0| \leqslant a, \quad |y_i - \bar{y}_i^0| \leqslant b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

то решение, определённое начальными данными x_0, y_1^0, y_2^0, $\ldots$, y_n^0 $\left[\text{принадлежащими области } D', \text{ содержащейся в } D;\ D' \text{ есть, например } \left(|x_0 - \bar{x}_0| \leqslant \frac{h}{2},\ |y_i^0 - \bar{y}_i^0| \leqslant \frac{b}{2}\right)\right]$,

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \tag{36}$$

допускает непрерывные производные по начальным данным:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0},\ \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Для доказательства допустим, что в формуле (36) величины x_0, y_i^0 получили некоторые определённые числовые значения, принадлежащие области D' $\left(|x_0 - \bar{x}_0| \leqslant \frac{h}{2},\ |y_i^0 - \bar{y}_i^0| \leqslant \frac{b}{2}\right)$. Подставив затем y_i, из (36) в уравнения (4), мы получим тождества. Далее, даём в формуле (36) одному начальному значению y_k^0 приращение Δy_k^0 (так чтобы новое значение не

выходило из D'); обозначим соответствующее решение через

$$\tilde{y}_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_k^0 + \Delta y_k^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (36')$$

составим для этого решения тождество, соответствующее (4) и вычтем оба тождества почленно:

$$\frac{d(\tilde{y}_i - y_i)}{dx} = f_i(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (36'')$$

Разности в правых частях равенства (36″) путём последовательного применения теоремы о конечном приращении преобразуем так:

$$\begin{aligned} f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = [f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)] + \\ + [f_i(x, y_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_n)] + \ldots \\ \ldots + [f_i(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)] = \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + \vartheta_{ij}(\tilde{y}_j - y_j), \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\partial y_j} (\tilde{y}_j - y_j), \\ 0 < \vartheta_{ij} < 1. \end{aligned}$$

Множители при $\tilde{y}_j - y_j$ во второй части последнего равенства [обозначим их через $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$] являются непрерывными функциями от совокупности переменных x, Δy_k^0. В самом деле, хотя ϑ_{ij} могут зависеть от x и Δy_k^0 и не непрерывно, но если при данных значениях этих аргументов $\tilde{y}_j - y_j \neq 0$, то непрерывность следует из равенства, определяющего a_{ij}:

$$a_{ij}(x, \Delta y_k^0) = \frac{f_i(x, y_1, \ldots, \tilde{y}_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots) - f_i(x, y_1, \ldots, y_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\tilde{y}_j - y_j},$$

где числитель и знаменатель непрерывны и знаменатель $\neq 0$; если же разность $\tilde{y}_j - y_j$ стремится к нулю при $x \to \bar{x}$, $\Delta y_k^0 \to \Delta \bar{y}_k^0$, то a_{ij}, в силу непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ по отношению к совокупности аргументов, стремится к значению $\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\partial y_j}$. Заметим, что, в частности, a_{ij} непрерывны при $\Delta y_k^0 = 0$ и что $a_{ij}(x, 0) = \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}$.

Разделив, далее, обе части преобразованных указанным способом равенств (36″) на Δy_k^0, мы получим следующие равенства:

$$\frac{d\left(\frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, \Delta y_k^0) \frac{\tilde{y}_j - y_j}{\Delta y_k^0}. \qquad (37)$$

Мы рассматриваем теперь систему (37) как систему линейных уравнений, в которой искомыми функциями являются: $\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{\Delta y_k^0}, \frac{\tilde{y}_2 - y_2}{\Delta y_k^0}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n - y_n}{\Delta y_k^0}$; выражения $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$ рассматриваем как известные функции x и параметра Δy_k^0 (мы имеем на это право, так как решения (36) и (36′) предполагаются известными). По доказанному, эти коэффициенты непрерывно зависят от параметра Δy_k^0 при достаточно малом $|\Delta y_k^0|$. Начальные условия для искомых функций, очевидно, таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } i \neq k: \quad \left(\frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)_{x=x_0} = \frac{y_i^0 - y_i^0}{\Delta y_k^0} = 0; \\ &\text{при } i = k: \quad \left(\frac{\tilde{y}_k - y_k}{\Delta y_k^0}\right)_{x=x_0} = \frac{\Delta y_k^0}{\Delta y_k^0} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Мы вправе применить доказанную выше лемму: решения системы (37) также непрерывно зависят от параметра Δy_k^0, и, в частности, для них существуют предельные значения:

$$\lim_{\Delta y_k^0 \to 0} \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0} = \frac{\partial \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_k^0} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Мы доказали существование производных (38) в любой точке $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ области D', т. е. во всей этой области; эти производные удовлетворяют системе однородных линейных уравнений:

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

причём вместо $y_1, \ldots, y_n$ надо подставить в правые части их значения (36). Система (39) — одна и та же для всех групп производных:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_k^0}, \frac{\partial y_2}{\partial y_k^0}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial y_k^0} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

чтобы получить производные для данного k, надо взять начальные условия: при $x = x_0$ $z_i^0 = 0$, $i \neq k$ и $z_k^0 = 1$. Очевидно, в силу однозначности решений системы (39), этими начальными условиями соответствующие производные вполне определяются; являясь решениями системы линейных уравнений, производные $\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$ оказываются тем самым непрерывными функциями от $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$.

Для доказательства существования производных от решения (36) по x_0 поступаем аналогично: пусть

$$y_i^* = \varphi_i(x;\ x_0 + \Delta x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0).$$

Тогда мы находим:

$$\frac{d}{dx}\frac{y_i^*-y_i}{\Delta x_0}=\left\{f_i\left(x, y_1^*, \ldots, y_n^*\right)-f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)\right\}\frac{1}{\Delta x_0}=$$

$$=\sum b_{ij}(x, \Delta x_0)\frac{y_j^*-y_j}{\Delta x_0},$$

где $b_{ij}(x, \Delta x_0)$ определяются аналогично тому, как выше были определены $a_{ij}\left(x, \Delta y_k^0\right)$. Опять $b_{ij}\left(x, \Delta x_0\right)$ оказываются непрерывными функциями от параметра Δx_0, при $|\Delta x_0|$ достаточно малом, причём $\lim\limits_{\Delta x\to 0} b_{ij}(x, \Delta x_0)=$ $=\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}$, и мы, применяя лемму, доказываем существование частных производных

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0}, \frac{\partial y_2}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_0},$$

причём эти производные удовлетворяют той же системе линейных уравнений (39). Выясним начальные условия, которым эти функции удовлетворяют. Мы неоднократно уже заменяли систему дифференциальных уравнений (4) вместе с начальными данными системой интегральных уравнений,

$$y_i=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

Если сюда подставить вместо $y_1, \ldots, y_n$ их значения (36), мы получим тождества; дифференцируя эти тождества по x_0 (по доказанному, эта операция законна), мы получаем:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0}=-f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)+\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_0}\,dx, \tag{4''}$$

откуда при $x=x_0$

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_0}\right)_0=-f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Таковы начальные значения функций z_i при $x=x_0$, которые надо взять в системе (39), чтобы получить производные $z_i=\frac{\partial y_i}{\partial x_0}$. Теорема доказана полностью.

Примечание 1. Систему линейных уравнений (39) можно получить формально, подставив решения (36) в уравнения (4), дифференцируя полученные тождества по $x_0\ y_1^0, \ldots, y_n^0$ и обозначая частные производные от y_i по одному из этих параметров через z_i. Однако, для того чтобы иметь право на такую операцию, надо предварительно доказать существование частных производных от y_i по параметрам и возможность менять порядок дифференцирования: $\frac{\partial}{\partial y_k^0}\frac{dy_i}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$.

Примечание 2. Если правые части уравнений (4), кроме переменных, зависят ещё от параметра λ, т. е. имеют вид (33), причём эти правые части

допускают непрерывные частные производные не только по $y_1, \ldots, y_n$, но *также по параметру* λ для $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, то в таком случае *решения* (35′) *допускают также частные производные по* λ.

В самом деле, этот случай легко сводится к разобранному в доказанной теореме; для этого дополним систему (33) $(n+1)$-м уравнением $\frac{d\lambda}{dx} = 0$ с начальным значением $\lambda = \lambda_0$ при $x = x_0$. Тогда, в силу теоремы, решения этой новой системы, даваемые формулами (35′) и формулой $\lambda = \lambda_0$, допускают производные по начальным значениям, в частности по λ_0 (при любом значении λ_0 в рассматриваемом интервале, т. е. по λ, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$). Система линейных уравнений, соответствующая в этом случае системе (39), очевидно, имеет вид:

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} z_j + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{39′}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_0} = 1\right)$. Здесь мы имеем систему неоднородных линейных уравнений. Начальные значения, если y_i^0 являются численными постоянными, суть: $z_1^0 = z_2^0 = \ldots = z_n^0 = 0$. Можно рассматривать ещё более общий случай, когда y_i^0 являются (дифференцируемыми) функциями параметра λ, $y_i^0 = \psi_i(\lambda)$. В этом случае $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}$ удовлетворяют той же системе (39′) с начальными условиями: $z_i^0 = \psi_i'(\lambda)$ при $x = x_0$. Распространение этих утверждений на случай любого числа параметров $\lambda, \mu, \ldots$ очевидно.

Примечание 3. Для случая одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с общим решением $y = \varphi(x; x_0, y_0)$ вместо системы (39) получается одно линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f[x, \varphi(x; x_0, y_0)]}{\partial y} z.$$

Интегрируя его с начальными условиями $z_0 = 1$ или $z_0 = -f(x_0, y_0)$ при $x = x_0$, мы получим явные выражения для $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x, \varphi(x; x_0, y_0))\, dx}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x; \varphi(x, x_0, y_0))\, dx}$$

Примечание 4. Возьмём какое-нибудь частное решение системы (4), полученное из формул (36) при определённых начальных значениях $x = x_0$, $y_1^0 = \overline{y_1^0}, \ldots, y_n^0 = \overline{y_n^0}$, и обозначим его через

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x), \quad y_2 = \overline{\varphi_2}(x), \ldots, y_n = \overline{\varphi_n}(x). \tag{40}$$

Назовём, как это принято в вариационном исчислении, *вариациями* функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения их производных по параметру α, равному x_0 или $y_1^0, \ldots,$ или y_n^0 [или λ, в случае системы (33)], при начальном значении параметра $\alpha = \alpha_0$ [т. е. при $x_0 = \overline{x}_0$ или $y_1^0 = \overline{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \overline{y}_n^0$ (или $\lambda = \overline{\lambda}_0$)]. Вводя для вариации символ δ, имеем:

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_{x_0 = \overline{x}_0,\ y_i^0 = \overline{y}_i^0}.$$

Очевидно, вариации δy_i удовлетворяют системе (39), которая в этом случае напишется так:

$$\frac{d\delta y_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_n(x))}{\partial y_j}\delta y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (39'')$$

Уравнения (39″) [а также иногда уравнения (39)] называются *уравнениями в вариациях.*

Если правые части зависят также от λ и параметр α есть λ, то уравнения в вариациях принимают вид:

$$\frac{d\delta y_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения (39″) позволяют вычислять вариации интегрированием системы (39″), если известно одно частное решение (40). Решения системы (39″) имеют простое геометрическое значение. Если α_0 — значение параметра, дающее решение (40), то решение, соответствующее значению параметра $\alpha_0 + d\alpha$ с точностью до бесконечно малых порядка выше первого относительно $d\alpha$, будет:

$$y_i(x, \alpha_0 + d\alpha) = \overline{y}_i(x) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} d\alpha = \overline{y}_i(x) + \delta y_i(x)\, d\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, *вариации $\delta y_i(x)$, умноженные на дифференциал параметра, дают главную часть приращения при переходе от решения* (40), *к бесконечно близкому решению.*

Примечание 5. Имеет место теорема:

Если функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ допускают m непрерывных частных производных по совокупности переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то решения имеют все частные производные m-го порядка по $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ и те производные m-го порядка по $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, где дифференцирование по x_0 входит один раз; если, кроме того, f_i допускают $p-1$ непрерывных производных по x ($p \leqslant m$), то решения имеют все производные m-го порядка по $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, в которых дифференцирование по x_0 производится не более p раз.

Мы проведём доказательство для $m = 2$. Рассмотрим систему $2n$ уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{dy_j} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (A)$$

Эта система распадается на две: систему (4) и систему (39). Интегрируя сначала первую при начальных значениях x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$, а затем вторую, в которую подставлены решения первой, причём в качестве начальных значений при $x = x_0$ взяты $z_i = 0$ при $i \neq l$, $z_l = 1$, мы, в силу предыдущего, получим решения:

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \quad z_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{B}$$

Предположим, что f_i допускают вторые непрерывные производные по $y_1 \ldots, y_n$ так как, кроме того, z_i входят линейно в систему (A), то, подставив в неё значения (B), мы для всей системы (A) можем составить уравнения в вариациях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta y_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\,\delta y_j, \\ \frac{d\delta z_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\,\delta z_j + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j\,\partial y_s}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l^0}\,\delta y_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Чтобы получить из системы (C) в качестве решений частные производные от функций y_i, z_i по y_k^0, мы, в силу предыдущего, должны взять начальные значения при $x = x_0$: $\delta y_i = 0$, $i \neq k$, $\delta y_k = 1$, $\delta z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Систему (C) с этими начальными условиями мы интегрируем опять, разбивая её на две системы. Сначала из n первых уравнений определяем функции $\delta y_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя эти значения δy_i в остальные n уравнений (C), получим систему линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta z_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\,\delta z_j + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j\,\partial y_s}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l^0}\,\frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Эта система при начальных значениях $x = x_0$, $\delta z_i = 0$ определит нам функции $\delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial y_k^0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вспоминая, что $z_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_l^0}$, мы видим, что доказано существование вторых производных:

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial y_l^0\,\partial y_k^0} \quad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нахождения смешанных вторых производных по y_l^0 и по x_0 ($l = 1, 2, \ldots, n$) допустим сначала, что эти производные существуют; дифференцируя в этом предположении равенство (4″) на стр. 302 по y_l^0, получаем:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_l^0 \partial x_0} = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_l^0} + \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial y_l^0 \partial x_0} dx + \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j \partial y_s} \frac{\partial y_j}{\partial x_0} \frac{\partial y_s}{\partial y_l^0} dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если в эти соотношения вместо y_i подставить найденные решения (B) и продифференцировать их по x, то мы получим последние n уравнений системы (C); при этом $z_i = \frac{\partial y_i}{\partial y_l^0}$, а символ δ обозначает дифференцирование по x_0. Присоединяя ещё первые n уравнений (C) с тем же смыслом δ, мы получим систему, которая, по предыдущему, определит производные: $\frac{\partial y_i}{\partial x_0}$, $\frac{\partial z_i}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0 \partial y_l^0}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); при этом из предыдущих интегральных соотношений следует, что нужно взять начальные условия:

$$(\delta y_i)_0 = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \quad (\delta z_i)_0 = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_l^0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, существование производных $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0 \partial y_i^0}$ доказано, причём новых предположений относительно дифференцируемости функций f_i не потребовалось.

Чтобы доказать существование производных $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0^2}$, надо потребовать дополнительно существования непрерывных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x}$. Интегрируя систему (A) при начальных условиях: $y_i = y_i^0$, $z_i = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ при $x = x_0$, получим, по предыдущему, $y_i = \varphi_i$, $z_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Вариация системы (A) даёт систему, в которой n уравнений тождественны с соответствующими уравнениями (C), а последние n уравнений будут:

$$\frac{d\delta z_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j} \delta z_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j \partial y_s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} \delta y_s.$$

Понимая в этой системе δ как дифференцирование по x_0, мы из первых n уравнений при начальных условиях $(\delta y_i)_0 = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, получим:

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

После этого последние n уравнений дадут: $\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0^2}$, если за начальные условия взять

$$(\delta z_i)_0 = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial x_0} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_j^0} f_j(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(эти условия можно найти, дифференцируя формально соотношения (4″) на стр. 302 по x_0).

Рассматривая системы из $3n, \ldots, kn$ уравнений, аналогичные системе (А), т. е. вводя наряду с y_i в качестве искомых функций их первые, вторые, ..., k-е производные по начальным условиям, мы докажем высказанную теорему для производных порядка k. Подобная теорема имеет место также для производных по параметру λ, от которого могут зависеть как правые части уравнений, так и начальные условия.

§ 4. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Мы предположим, что в некоторой замкнутой области D функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и все их частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непрерывно зависят от всех аргументов. Тогда применима теорема существования и единственности (см. главу IV, § 1). Если точка с координатами $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ лежит внутри некоторой области D', содержащейся в D, то существует одна и только одна система решений уравнений (4), удовлетворяющих начальным условиям:

$$y_i = y_i^0 \text{ при } x = x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть эти решения будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x;\; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ y_2 &= \varphi_2(x;\; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x;\; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0). \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

В этих формулах мы явно указываем зависимость решения от начальных данных x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$, которые мы принимаем за параметры, могущие принимать различные значения.

В предыдущем параграфе мы доказали, что правые части равенств (36) допускают непрерывные производные по x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$.

Рассмотрим теперь в области D начальную точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ и некоторую точку $(x, y_1, \ldots, y_n)$, лежащую на интегральной кривой, проходящей через начальную точку. Значения x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$, с одной стороны, и значения $x, y_1, \ldots, y_n$, с другой стороны, связаны соотношениями (36). Если теперь принять точку $(x, y_1, \ldots, y_n)$ за начальную, то, в силу свойства единственности, определённая этими начальными значениями интегральная кривая пройдёт через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, причём, очевидно, будут иметь место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= \varphi_1(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2^0 &= \varphi_2(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^0 &= \varphi_n(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Формулы (41) показывают, что *система уравнений* (36) *может быть разрешена* (*однозначно в области* D') *относительно начальных значений* $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, причём правые части допускают непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Заменяя, как мы это делаем в теореме существования, начальные значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ через произвольные постоянные C_1, $C_2, \ldots, C_n$ и давая параметру x_0 определённое числовое значение, мы получим совокупность уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_n. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Совокупность равенств (42) называется *общим интегралом системы* (4), а каждое из равенств (42) называется *первым интегралом этой системы* [1]). Заметим, что левая часть каждого из этих

[1]) Сравнивая формулы (41) и (36), мы видим, что уравнения (41) могут быть разрешены относительно $y_1, \ldots, y_n$, причём, очевидно, для этих величин получатся выражения (36). Отсюда следует, что и уравнения (42) разрешимы относительно $y_1, \ldots, y_n$, так как их левые части отличаются от правых частей уравнений (41) только обозначением — отсутствием явно показанного x_0, который не играет в разрешении никакой роли. Получатся выражения вида:

$$y_i = \overline{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{36'''}$$

причём следует помнить, что $C_i = y_i^0$. Эти формулы выражают то решение, в котором при $x = x_0$ функции y_i принимают значения $y_i = y_i^0$; отметим ещё, что это — лишь иная запись формул (36).

равенств есть функция от независимого переменного и искомых функций; из самого происхождения формул (42) следует, что эта функция обращается в некоторую постоянную величину, если вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ поставить их выражения (36), т. е. любое решение системы (4) (причём, очевидно, для разных решений значение этой постоянной будет, вообще говоря, различное). Мы можем, таким образом, дать два определения первого интеграла:

1) *Первыми интегралами системы* (4) *называются соотношения, полученные разрешением уравнений, дающих общее решение системы, относительно произвольных постоянных.*

Предыдущее рассуждение показывает, что такое разрешение всегда возможно, если за произвольные постоянные взять начальные значения искомых функций.

Очевидно, что это определение применимо лишь ко всей системе соотношений (42). Поэтому мы дадим второе определение, характеризующее каждый первый интеграл в отдельности.

2) *Первым интегралом системы называется соотношение, не тождественно равное постоянному, содержащее в левой части независимое переменное и искомые функции и принимающее постоянное значение, если вместо искомых функций подставить какое-нибудь решение системы* (4).

Заметим, что из этого последнего определения очевидно существование бесконечного множества систем первых интегралов. В самом деле, соотношение

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)] = C, \qquad (42')$$

где C есть произвольное постоянное, а Φ — произвольная непрерывная функция своих аргументов, также является первым интегралом системы (4), так как, подставляя вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения системы, мы обращаем функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, а следовательно и Φ, в постоянные величины.

2. Исходя из второго определения первых интегралов, можно дать аналитический признак, характеризующий левую часть первого интеграла. Мы предположили, что правые части данных уравнений (4) *допускают непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, \ldots, y_n$; тогда, как доказано выше, правые части равенств (41) допускают непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; мы можем рассматривать более общие соотношения вида (42), причём мы всегда будем предполагать, что их левые части допускают производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; это будет иметь место всегда, если левые части равенств (42) получены из правых частей равенств (41) формулами вида (42′), где Φ — функция, имеющая непрерывные производные по всем своим аргументам.

Предположим, что в одном из первых интегралов

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C \qquad (42'')$$

на место $y_1, \ldots, y_n$ подставлено какое-нибудь решение системы (4); тогда левая часть обратится в функцию от x, тождественно равную постоянной. Дифференцируя обе части этого тождества по x, получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}=0. \tag{43}$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ суть решения системы (4), то производные $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ можно заменить в равенстве (43) равными им правыми частями уравнений (4), и мы получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\ldots+f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0. \tag{44}$$

В равенстве (44) $y_1, \ldots, y_n$ суть функции от x, являющиеся некоторым решением системы (4); таким образом, значения $(x, y_1, \ldots, y_n)$ в этом равенстве суть координаты точки $(n+1)$-мерного пространства, через которую проходит рассматриваемое решение. Но так как результат дифференцирования равенства (42″) не зависит от C, то равенство (44) выполняется для точки $(x, y_1, \ldots, y_n)$, лежащей на любой интегральной кривой в рассматриваемой области. Так как, по теореме существования, через каждую точку $(x_0, \overset{0}{y_1}, \ldots, \overset{0}{y_n})$ этой области проходит интегральная кривая, то, следовательно, равенство (44) имеет место для любой точки рассматриваемой области, т. е. тождественно по $x, y_1, \ldots, y_n$. Итак, левая часть каждого первого интеграла удовлетворяет тождественно соотношению (44).

Пусть, обратно, некоторая функция ψ обращает уравнение (44) в тождество; тогда вдоль любой интегральной кривой системы (4) имеет место равенство (43), а следовательно, и равенство (42″). Таким образом, вдоль каждой интегральной кривой функция ψ принимает постоянное значение.

Итак, *равенство* (44) *есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение* (42″) *представляло первый интеграл.*

Иногда свойство первого интеграла, выражаемое равенством (44), формулируют так: производная от левой части первого интеграла обращается в нуль в силу данной системы дифференциальных уравнений.

3. Если нам удастся каким-нибудь способом найти *n независимых* первых интегралов системы (4), т. е. таких, которые можно разрешить относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то разрешение их даёт выражение $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Эти выражения дадут нам общее решение системы (4).

В самом деле, условие независимости интегралов (42) означает, что якобиан $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ не равен нулю тождественно; пусть система значений $x_0, \overset{0}{y_1}, \ldots, \overset{0}{y_n}$ даёт ему отличное от нуля значе-

ние. Тогда в окрестности этих значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются однозначными непрерывными функциями от $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и от x. Задавая начальные значения x_0 и $\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \ldots, \bar{y}_n^0$, в достаточной близости от $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ и обозначая соответствующие значения постоянных через $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$, мы видим, что эти значения постоянных определяют решение системы (4): $y_1 = \bar{\varphi}_1(x, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n), \ldots$ $\ldots, y_n = \bar{\varphi}_n(x, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n)$, которое при $x = x_0$ принимает наперёд заданные начальные значения $\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \ldots, \bar{y}_n^0$. А это и есть критерий для общего решения.

Таким образом, *знание n (независимых) первых интегралов равносильно интеграции системы* (4).

Если нам известен один первый интеграл системы:

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

то из него можно выразить одну из искомых функций, например y_n, через x, остальные искомые функции и произвольное постоянное C:

$$y_n = \omega(x, y_1, \ldots, y_{n-1}; C);$$

внося это выражение в первое, второе, ..., $(n-1)$-е уравнение системы (4), мы придём к системе $n-1$ уравнений с $n-1$ искомыми функциями; таким образом, *порядок системы понижается на единицу*. Производя интеграцию новой системы $(n-1)$-го порядка, мы введём $n-1$ произвольных постоянных, которые вместе с C дадут систему n произвольных постоянных, т. е. мы получили общее решение системы (4). Аналогично, если нам известны k независимых первых интегралов, то порядок системы понижается на k единиц.

Пример 8. Рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Её общее решение есть: $x = A\cos(t+\alpha)$, $y = A\sin(t+\alpha)$ (A и α — произвольные постоянные). Очевидно, что соотношение $x^2 + y^2 = C$ является первым интегралом этой системы. В самом деле, полная производная по t от левой части, в силу уравнений системы, будет:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2yx = 0.$$

Первым интегралом будет также соотношение $\Phi(x^2 + y^2) = C$, где Φ — произвольная (дифференцируемая) функция.

Пример 9. В теории движения твёрдого тела встречается система уравнений:

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp, \quad C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq,$$

где $A \geqslant B \geqslant C > 0$ — заданные постоянные (главные моменты инерции тела), а искомые функции p, q, r — составляющие вектора мгновенной скорости.

Умножая уравнения соответственно на p, q, r и складывая, получим:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0.$$

Левая часть есть полный дифференциал; интеграция его даёт:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = m^2$$

(m — произвольная постоянная) — один первый интеграл уравнения. Умножая уравнения на Ap, Bq, Cr и складывая, находим:

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда получаем другой первый интеграл:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = n^2$$

(n — произвольная постоянная). Других интегралов, не зависимых от этих двух и не содержащих явно t, наша система, очевидно, не имеет. По общей теории, мы можем воспользоваться этими интегралами, чтобы понизить порядок системы до первого. Предполагая $A > B > C$, разрешаем два полученных соотношения относительно p^2, q^2; имеем:

$$p^2 = \alpha r^2 + a, \quad q^2 = -\beta r^2 + b,$$

где $\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0$, $\beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0$, и постоянные величины a и b, завися от произвольных постоянных m^2 и n^2, сами являются произвольными.

Внося значения p и q в третье уравнение системы, получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C}\sqrt{(\alpha r^2 + a)(-\beta r^2 + b)};$$

это — уравнение с разделяющимися переменными, и решение получается квадратурой в эллиптических функциях.

Метод, которым мы нашли первые интегралы для указанного примера, заключается в том, что мы подбираем такие комбинации левых частей уравнений, которые представляют полные производные по t, причём правая часть обращается в нуль; приравнивая соответствующие первообразные функции постоянным, мы получаем первые интегралы.

§ 5. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений.

1. Соотношения (42), дающие общий интеграл системы (4), имеют ту особенность, что в них независимые и зависимые переменные входят равноправно. Таким образом, эти соотношения сохраняют свою силу, если мы выберем в качестве независимого переменного одну

из функций y_i. Соответствующая замена переменных изменит форму системы (4), так как в неё входят производные; но если написать данные уравнения при помощи дифференциалов (первого порядка), то, по известному их свойству, система в этой форме сохраняет свою силу при любой замене переменных, в частности, вышеуказанного типа. Итак, мы можем написать систему (4) в виде:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}=$$
$$=\frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Эта система останется равносильною первоначальной, если все знаменатели умножить на один и тот же множитель (при этом надо ограничиться рассмотрением тех областей, где этот множитель не обращается в нуль). Поэтому мы можем предположить, что и стоящий вначале дифференциал dx имеет в знаменателе не единицу, а некоторую функцию. Тогда несимметрия переменных останется только в обозначениях. Делаем последний шаг: вместо переменных x, y_1, y_2, ..., y_n пишем переменные x_1, x_2, ..., x_n (для простоты письма число переменных мы будем обозначать через n, а не $n+1$).

Система дифференциальных уравнений в симметричной форме имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \quad (45)$$

Общий интеграл этой системы запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_1, \ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_2, \ldots \\ \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Так как мы желаем иметь возможность принять любое из переменных за независимое, а всё остальное—за искомые функции, то естественно требовать от функции X_i непрерывности и существования непрерывных частных производных по всем аргументам x_1, x_2, ..., x_n.

Чтобы перейти от симметричной системы (45) к системе вида (4), надо назначить одно из переменных, например x_n, в качестве независимого. Систему перепишем в виде:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n}, \ \ldots, \ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \quad (45')$$

При этом, чтобы не нарушалась непрерывность правых частей, необходимо при начальных значениях $\overset{0}{x}_1$, $\overset{0}{x}_2$, ..., $\overset{0}{x}_n$ иметь

$$X_n(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)\neq 0.$$

Если же данные начальные значения обращают в нуль X_n, мы можем взять за независимое переменное такое x_i, чтобы соответствующая функция X_i не обращалась в нуль. Правые части системы вида (45′) могут оказаться разрывными при любом выборе независимого переменного лишь в том случае, если начальные значения $\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}$ обращают в нуль все функции X_i:

$$X_1(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}) = X_2(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}) = \ldots$$
$$\ldots = X_n(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_n}) = 0.$$

Такие начальные значения называются *особыми начальными значениями*; они соответствуют *особым точкам* системы (45). Очевидно, к особым начальным значениям неприменимо доказательство Пикара существования и единственности решения. Мы будем исключать особые точки из рассматриваемой области.

Аналитическое условие того, чтобы каждый интеграл из числа интегралов (46) или вообще любое соотношение вида

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \qquad (46')$$

являлось первым интегралом системы, получается следующим образом. Вдоль интегральной кривой системы функция ψ сохраняет постоянное значение; следовательно, её полный дифференциал, взятый вдоль этой кривой, равен нулю:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Но вдоль интегральной кривой дифференциалы dx_i, в силу уравнений (45), пропорциональны значениям функций X_i; следовательно, вдоль каждой интегральной кривой имеем:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0. \qquad (47)$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы заметим, что соотношение (47) выведено для значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющих (переменную) точку некоторой интегральной кривой. Но так как это равенство справедливо для любого значения постоянного C в формуле (46′), то равенство (47) выполняется для точек любой интегральной кривой. Отсюда следует, так как через каждую точку рассматриваемой области проходит интегральная кривая, что *соотношение* (47) *для левой части первого интеграла выполняется тождественно и что, обратно, всякая функция* ψ, *удовлетворяющая тождественно уравнению* (47), *даёт первый интеграл, если её приравнять произвольному постоянному.*

Геометрически решение системы (45), заданное общим интегралом (46), можно рассматривать как многообразие одного измерения

(«интегральная кривая»), определённое пересечением $n-1$ многообразий $n-1$ измерений $\psi_i = C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ («гиперповерхности $n-1$ измерений» в n-мерном пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$); семейство интегральных кривых зависит от $n-1$ параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$; каждое семейство гиперповерхностей зависит от одного параметра.

2. Приведение системы уравнений к симметричной форме часто оказывается полезным для разыскания первых интегралов. Написав уравнения в дифференциальной форме (45), мы ищем такие комбинации членов равенств (45), линейные относительно дифференциалов, чтобы в левой части стоял полный дифференциал, а в правой — нуль. Интегрируя этот полный дифференциал и приравнивая результат постоянному, получаем первый интеграл. Если таким путём найдено $n-1$ интегралов, мы получаем общий интеграл, эквивалентный общему решению; если найдено $n-2$ интегралов, задача нахождения общего решения сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 10. $(z-y)^2 \frac{dy}{dx} = z$, $(z-y)^2 \frac{dz}{dx} = y$. Пишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Два последних члена этих равенств дают интегрируемую комбинацию:

$$y\,dy - z\,dz = 0,$$

откуда первый интеграл: $y^2 - z^2 = C_1$.

Далее, приравнивая первое отношение отношению разности предыдущих и последующих членов двух последних отношений, имеем:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy-dz}{z-y}, \text{ или } dx + (z-y)(dz-dy) = 0,$$

откуда — другой первый интеграл

$$2x + (z-y)^2 = C_2.$$

Задача интегрирования закончена. Впрочем, благодаря делению на $(y-z)^2$, мы потеряли семейство решений, зависящее от одного параметра: $x = C$, $y = z$; эти решения не существуют, если независимым переменным назначить x.

Пример 11. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$. Пишем систему в виде:

$$dy - dx = -\frac{dx}{z}, \quad \frac{dx}{y-x} = dz;$$

перемножая, получим интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dy-dx}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0,$$

откуда $(y-x)z=C_1$. Для дальнейшей интеграции определяем z: $z=\frac{C_1}{y-x}$, и вносим в первое уравнение; получаем: $dy-dx=-\frac{dx(y-x)}{C_1}$, или $(y-x)e^{\frac{x}{C_1}}=C_2$. Отсюда находим общее решение: $y=\overline{C}_2e^{-\frac{x}{C_1}}+x$, $z=\frac{C_1}{\overline{C}_2}e^{\frac{x}{C_1}}$. Заметим, что соотношение, содержащее C_2, не является первым интегралом, так как оно содержит также произвольное постоянное C_1; чтобы получить из него первый интеграл, надо из первого соотношения выразить C_1 через x, y, z и подставить во второе; получим:

$$(y-x)e^{\frac{x}{z(y-x)}}=C_2.$$

Примечание 1. В п. 4 § 1 настоящей главы мы рассматривали динамическую систему:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt}=X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (6')$$

причём интерпретировали t как время. Для нахождения траекторий мы исключали dt из системы (6'); получаемую таким образом систему целесообразно написать в симметричной форме, так как все величины x_1, x_2, ..., x_n, представляющие координаты точек, в этой интерпретации равноправны. Полученная система вида

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \qquad (45)$$

имеет $n-1$ первых интегралов (46), которые, очевидно, будут также интегралами системы (6'). Таким образом, система (6'), в которой правые части не зависят от времени, допускает $n-1$ интегралов, не зависящих от времени. В примере 9 мы нашли для системы третьего порядка два интеграла, не зависящих от времени.

Обратно, если дана система вида (45), то вместо того, чтобы назначать в качестве независимого переменного одну из величин x_i, можно приравнять все равные между собой отношения дифференциалу нового независимого переменного t:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt;$$

в результате мы получаем систему вида (6'). Если в формулах, дающих решение системы (6'), мы выразим t через одну из переменных x_i, например через x_n, и вставим это выражение в значения функций x_1, x_2, ..., x_{n-1}, то получим решение системы (45). Если такого исключения не производить, то мы получим интегральные кривые системы (45), выраженные в функции параметра t.

Примечание 2. Существование первых интегралов (однозначных и непрерывных) мы доказываем только для достаточно малой области, в кото-

рой определённые по теореме существования неявные функции остаются однозначными. Для всей области, в которой определены интегральные кривые системы, первые интегралы могут и не существовать. Рассмотрим следующий простой пример. Система

$$\frac{dx}{dt}=x, \ \frac{dy}{dt}=y$$

имеет общее решение $x=x_0e^t$, $y=y_0e^t$, в частности, при $x_0=y_0=0$, $x=y=0$. Интегральные кривые заполняют плоскость. Но эта система не может иметь интеграла, не зависящего от времени и непрерывного во всей плоскости. В самом деле, такой интеграл имеет постоянное значение вдоль всякого решения, а так как каждое решение (не равное нулю тождественно) имеет пределом при $t\to-\infty$ значения $x=0$, $y=0$, то это же постоянное значение интеграл должен принимать в силу непрерывности в точке (0, 0); следовательно, в силу однозначности в точке (0, 0), это постоянное значение должно быть одно и то же для всех интегральных кривых, т. е. левая часть интеграла была бы тождественно равна постоянной, что противоречит определению первого интеграла. Между тем во всякой области, не содержащей точек оси Ox, система имеет первый интеграл (однозначный и непрерывный) $\frac{x}{y}=C$; если же взять интеграл $\frac{x^2}{x^2+y^2}=C$ того же уравнения, то он будет непрерывен в областях, не содержащих точки (0, 0).

ЗАДАЧИ.

Найти общее решение (или общий интеграл) систем:

193. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$.

194. $\frac{dx}{x(y^2+z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

195. $\frac{dx}{x(x+y)}=\frac{dy}{-y(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$.

196. $\frac{dx}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dz}{dt}=x-y+1$.

§ 6. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению[1]).

1. Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{48}$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ предположим непрерывными ($i, j=1, 2, \ldots, n$). Будем интерпретировать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты движущейся точки, а t, $t_0\leqslant t<\infty$, как время.

Каждое частное решение системы (48) будем называть *движением*. Рассмотрим движение, определённое начальными данными:

$$t=t_0, \quad x_i=x_i^0, \quad \text{т. е.} \tag{49}$$

$$x_i=x_i(t;\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

[1]) Для понимания этого параграфа требуется ознакомление с § 3 и с материалом, напечатанным мелким шрифтом в § 2.

Определение. *Движение* (49) *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon>0$ *найдётся такое* $\delta>0$, *что как только* $|x_i^0-\tilde{x}_i^0|<\delta$, $i=1, \ldots, n$, *то*

$$|x_i(t;\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)-x_i(t;\ t_0,\ \tilde{x}_1^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)|<\varepsilon \tag{50}$$

$$(i=1,\ \ldots,\ n)$$

для всех значений $t_0\leqslant t<+\infty$.

Всякое движение, не являющееся устойчивым, называется неустойчивым; это означает, что существует такое $\varepsilon_0>0$, *что какое бы малое* $\delta>0$ *ни было выбрано, всегда найдутся значения* $(\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)$ и $t=T$, *что для некоторого* i *и этих* T *будет выполняться неравенство*:

$$|x_i(T,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)-x_i(T,\ t_0\ \tilde{x}_1^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)|\geqslant\varepsilon_0,$$

несмотря на то, что

$$|x_k^0-\tilde{x}_k^0|<\delta \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Исследуемое движение, соответствующее начальным условиям t_0, $x_1^0, \ldots, x_n^0$, Ляпунов называет *невозмущённым*, а движение с изменёнными начальными условиями: $t_0, \tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_n^0$ — *возмущённым* движением. Таким образом, устойчивость невозмущённого движения геометрически означает, что в любой данный момент времени t точка траектории возмущённого движения находится в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущённого движения.

Перейдём теперь к координатам $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ по формулам:

$$x_i=\bar{x}_i+x_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{51}$$

где для краткости мы положили $x_i(t)=x_i(t,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$; тогда невозмущённое движение $x_i(t)$ перейдёт в невозмущённое движение в новых координатах $\bar{x}_i(t)\equiv 0\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, т. е. в так называемую точку покоя. Действительно, произведём замену переменных (51) в уравнениях (48). Имеем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}+\frac{d}{dt}(x_i(t))=X_i(t;\ \bar{x}_1+x_1(t),\ \ldots,\ \bar{x}_n+x_n(t)).$$

Разлагая правые части последних равенств в ряд Тейлора по $\bar{x}_i$ вплоть до членов первого порядка, получим:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}+\frac{d}{dt}(x_i(t))=X_i(t;\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))+$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\bar{x}_m\frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;\ x_1(t)+\theta_i\bar{x}_1,\ \ldots,\ x_n(t)+\theta_i\bar{x}_n).$$

Так как $x_i(t)$ есть решение системы (48), то мы получаем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}=\sum_{m=1}^{n}\bar{x}_m\frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;\ x_1(t)+\theta_i\bar{x}_1,\ \ldots,\ x_n(t)+\theta_i\bar{x}_n). \tag{52}$$

Ранее было доказано (см. стр. 298), что коэффициенты при $\bar{x}_m$ в правой части равенства (52) являются непрерывными функциями. Этой системе с начальными условиями $\bar{x}_i^0=0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ удовлетворяет решение $\bar{x}_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, что и доказывает наше утверждение.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразование уже совершилось, и будем рассматривать устойчивость по Ляпунову *тривиального решения*: $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Условия (50), определяющие устойчивость, означают теперь, что траектория возмущённого движения не выходит при $t_0\leqslant t<+\infty$ из ε-окрестности точки покоя.

В дальнейшем нас будут интересовать *качественные* критерии устойчивости по Ляпунову: и теоретически и для практических приложений важны лишь те случаи, когда мы, не умея интегрировать систему (48), можем, тем не менее, делать заключения об устойчивости невозмущённого движения.

2. Предположим, что функции X_i допускают непрерывные производные первого порядка по x_i и что эти производные являются постоянными вдоль тривиального решения, т. е.

$$\frac{\partial X_i(t,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)}{\partial x_j}=a_{ij}=\text{const.}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В сделанных предположениях функции X_i могут быть представлены в виде:

$$X_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\varphi_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

где φ_i — бесконечно малые порядка выше первого в окрестности точки $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Система (48) примет вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\varphi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{53}$$

Если в системе (53) отбросить члены порядка выше первого, то полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{54}$$

называется системой *первого приближения* для нелинейной системы (53), а значит, при сделанных предположениях, и для системы (48).

Можно рассматривать уравнения (54) и как систему уравнений *в вариациях* (см. § 3 настоящей главы, стр. 304) для системы (48) в окрестности её тривиального решения.

До Ляпунова при исследовании вопроса об устойчивости ограничивались в основном изучением устойчивости *в первом приближении*, считая полученный результат разрешающим вопрос об устойчивости и основной нелинейной системы (48).

Ляпунов первый показал, что в общем случае такое заключение неверно; с другой стороны, он даёт ряд примеров нелинейных систем (48), для которых вопрос об устойчивости разрешается до конца по первому приближению.

3. Рассмотрим сначала случай, когда все корни характеристического уравнения первого приближения, т. е. системы (54), простые, или по крайней мере все элементарные делители матрицы коэффициентов системы (54) простые. Тогда существует неособое линейное преобразование:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{55}$$

приводящее систему (54) к диагональной форме. Применим теперь это преобразование к системе (53), тогда эта система примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \overset{*}{\varphi}_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \overset{*}{\varphi}_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + \varphi_n^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (54), а $\varphi_i^*(t, y_1\ y_2, \ldots, y_n)$ определяются равенствами:

$$\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{57}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

ТЕОРЕМА. *Если*: 1) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *отрицательны*;

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию*:

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{A}$$

где M — некоторая постоянная, а $\alpha > 0$;

3) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *простые или по крайней мере элементарные делители матрицы коэффициентов системы уравнений* (54) *простые,— то тривиальное решение системы уравнений* (53) *устойчиво.*

Доказательство. Условие 3) теоремы позволяет при помощи неособого линейного преобразования (55) привести систему (53) к виду (56).

Покажем предварительно, что функции $\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из системы (56) удовлетворяют условию (А). В самом деле, пусть α — верхняя грань модулей коэффициентов преобразования (55), т. е.

$$|\alpha_{ik}| \leqslant \alpha \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, пользуясь равенством (57), получим:

$$|\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)| = |\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant M\alpha \sum_{k=1}^{n} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha} \leqslant M_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (58)$$

где

$$M_1 = M\alpha n.$$

Но при всяком неособом преобразовании сумма квадратов старых переменных не превосходит суммы квадратов новых переменных, умноженных на некоторую постоянную. В самом деле, разрешим равенства (55) относительно переменных x_i:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k, \qquad (59)$$

и пусть β — верхняя грань $|\beta_{ik}|$, т. е. $|\beta_{ik}| \leqslant \beta$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, тогда

$$x_i^2 = (\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k)^2 \leqslant \{\sum_{k=1}^{n} |\beta_{ik}||y_k|\}^2 \leqslant \beta^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_k||y_j| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_k^2 + y_j^2) = n\beta^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством:

$$|y_k||y_j| \leqslant \frac{y_k^2 + y_j^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant L \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \tag{60}$$

где

$$L = n^2\beta^2.$$

Отметим попутно, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant L_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \tag{61}$$

где

$$L_1 = n^2\alpha^2.$$

Из неравенств (58) и (60) получаем требуемое неравенство:

$$|\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M^* \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}, \tag{62}$$

где

$$M^* = M_1 L^{\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Теперь умножим первое уравнение системы (56) на y_1, второе — на y_2 и т. д. и сложим их, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n). \tag{63}$$

По условию, все числа λ_i отрицательны; обозначим наибольшее из них через $-\omega$ и пусть

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1 = -\omega; \quad \omega > 0. \tag{64}$$

Теперь оценим сверху выражение, стоящее справа в равенстве (63). В силу неравенств (62) и (64), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M^* \sum_{i=1}^{n} |y_i| \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

или, так как $|y_i| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + nM^* \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1+\alpha}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \left(-\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(1 - \frac{nM^*}{\omega}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right). \tag{65}$$

Будем считать, что y_k настолько малы, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 < \left\{\frac{1}{2}\frac{\omega}{nM^*}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{66}$$

Такое предположение допустимо, потому что в начальный момент $t = t_0$ величины y_k можно предполагать как угодно малыми, в частности удовлетворяющими неравенству (66), а в силу непрерывной зависимости решений нашей системы от начальных условий, неравенство (66) будет иметь место в некоторой окрестности значения $t = t_0$.

Тогда неравенство (65) перепишется так:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \leqslant -\frac{\omega}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t),$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя от t_0 до t, получим:

$$\ln\left[\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t)\right]_{t_0}^{t} \leqslant -\omega(t-t_0)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \leqslant e^{-\omega(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t_0). \tag{67}$$

Из неравенства (67) видно, что $\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t)$ *монотонно* убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому, если неравенство (66) выполнено в начальный момент t_0, то это неравенство будет выполнено при всех значениях $t \geqslant t_0$. Следовательно, и неравенство (67) справедливо при всех $t > t_0$, если только при $t = t_0$ неравенство (66) имело место.

Из неравенств (60) и (61) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) \leqslant LL_1 e^{-\omega(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t_0), \tag{68}$$

поэтому, если $|x_k(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{LL_1 n}}$, то $|x_k(t)| < \varepsilon$, а это и означает, что тривиальное решение системы (53) устойчиво. Отметим также, что, как видно из неравенства (68), все $x_k(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, теорема доказана.

4. Рассмотрим теперь случай, когда среди элементарных делителей матрицы коэффициентов системы (54) будут встречаться кратные. Тогда существует неособое линейное преобразование, которое приведёт систему (54) к нормальной форме (30_1), ..., (30_k) (см. стр. 293).

Сделаем ещё одно линейное неособое преобразование, а именно, положим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1\gamma^{n-1}, \\ y_2 &= z_2\gamma^{n-2}, \\ &\dots\dots \\ y_n &= z_n, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где γ — произвольное, не равное нулю число. Это число γ будем считать положительным; в дальнейшем оно будет выбрано достаточно малым.

Таким образом, мы имеем неособое линейное преобразование:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{*} x_k, \tag{70}$$

приводящее систему (53) к виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \gamma y_2 + \varphi_1^{*}(t, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_1 y_2 + \gamma y_3 + \varphi_2^{*}(t, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{e_1}}{dt} &= \lambda_1 y_{e_1} + \varphi_{e_1}^{*}(t, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-e_k+1}}{dt} &= \lambda_k y_{n-e_k+1} + \gamma y_{n-e_k+2} + \varphi_{n-e_k+1}^{*}(t, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_k y_n + \varphi_n^{*}(t, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Здесь

$$\varphi_i^{*}(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{*}\varphi_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{72}$$

З а м е ч а н и е. Равенства (72) определяют функции $\varphi_k^{*}(t, y_1, \dots, y_n)$ также и в том случае, когда некоторые из чисел λ_i, а следовательно, и α_{ij} и величины y_i комплексны. В самом деле, каждой данной системе значений величин y_i, в силу неособенности преобразования (70), соответствует единственная система значений x_i (мы рассматриваем такие значения y_i, которые соответствуют действительным значениям x_i), а системе значений x_i, в силу равенств (72), соответствует определённое значение функций $\varphi_i^{*}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Таким

образом, установлена зависимость $\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ от своих аргументов.

Если некоторое λ_i — комплексное число, то ему соответствует некоторое с ним комплексно сопряжённое $\lambda_j = \overline{\lambda}_i$; тогда коэффициенты преобразования, соответствующие корню λ_j, будут комплексно сопряжены с коэффициентами преобразования, соответствующими корню λ_i, но равенства

$$\overline{y}_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_{ik}^* x_k \tag{73}$$

показывают, что комплексно сопряжённым значениям коэффициентов преобразования соответствуют комплексно сопряжённые значения переменных y_i, поэтому

$$\overline{\varphi}_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_{ik}^* \varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ = \varphi_i^*(t, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n). \tag{74}$$

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *отрицательны*,

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию* (A),

то тривиальное решение системы (53) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть система уравнений (53) приведена к виду (71). Поскольку функции $\varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n)$ выражаются линейно с помощью формул (72) через $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, то оценка (62) имеет место и в этом случае, где $\alpha \geqslant |\alpha_{ik}^*|$. Пусть $\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \leqslant \lambda_1 = -\omega$, где $\omega > 0$. Умножая первое уравнение системы (71) на y_1, второе — на y_2 и т. д. и складывая их и затем заменяя все λ_k через $-\omega$, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \\ \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma {\sum_{i=1}^{n}}' y_i y_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{75}$$

где штрих у знака средней суммы означает, что при суммировании выпускаются значения $i = e_1, e_1 + e_2, \ldots, n - e_k, n$. Применяя неравенство (62) для $\varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n)$ и замечая, что

$$y_i y_{i+1} \leqslant |y_i y_{i+1}| \leqslant \frac{y_i^2 + y_{i+1}^2}{2},$$

мы, усиливая неравенство (75), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M^*\sum_{i=1}^{n}|y_i|\left\{\sum_{k=1}^{n}|y_k^2|\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}. \qquad (76)$$

Выберем теперь положительное число γ *так, чтобы* $-\omega+\gamma$ было отрицательным, и положим:

$$-\omega+\gamma=-\omega_1, \quad \text{где} \quad \omega_1>0.$$

Последнее слагаемое в неравенстве (76) оцениваем так же, как это было сделано при получении неравенства (65), тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega_1\sum_{i=1}^{n} y_i^2\left[1-\frac{nM^*}{\omega_1}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right]. \qquad (77)$$

Неравенство (77) совершенно такое же, как и неравенство (65), только положительное число ω заменено положительным числом $\omega_1=\omega-\gamma$; поэтому, поскольку из неравенства (65) следовала устойчивость тривиального решения системы (53), то и из неравенства (77) будет следовать устойчивость этого решения.

Тем же методом, каким мы доказали первые две теоремы, можно доказать и следующую, их обобщающую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *все корни характеристического уравнения для первого приближения* (54) *имеют отрицательную действительную часть,*

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию* (А),

то тривиальное решение системы (53) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть система уравнений (53) приведена к виду (71). Наряду с системой (71) рассмотрим также систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}_1}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_1+\gamma\bar{y}_2+\varphi_1^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n),\\
\frac{d\bar{y}_2}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_2+\gamma\bar{y}_3+\varphi_2^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\bar{y}_n}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_n+\varphi_n^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n).
\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Из замечания в п. 4 следует, что система (78), с точностью до нумерации, совпадает с системой (71).

Пусть $-\omega$ — наибольшая действительная часть корней характеристического уравнения системы (54), т. е.

$$R(\lambda_k)\leqslant-\omega, \quad \text{где} \quad \omega>0\,^{1)}. \qquad (79)$$

---

[1]) $R(z)$ обозначает действительную часть числа z: если $z=x+iy$, то $R(z)=x$.

Заметим, что $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}y_i\bar{y}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\frac{dy_i}{dt}$; тогда, пользуясь системами (71) и (78), получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}2R(\lambda_i)|y_i|^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}{}'(\bar{y}_iy_{i+1}+\bar{y}_{i+1}y_i)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[\bar{y}_i\varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n)+y_i\varphi_i^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)], \quad (80)$$

но $\bar{y}_iy_{i+1}+\bar{y}_{i+1}y_i\leqslant 2|y_iy_{i+1}|\leqslant|y_i|^2+|y_{i+1}|^2$. Пользуясь этим оценкой (62) для $\varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n)$ и $\varphi_i^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, которая, очевидно, имеет место в нашем случае, и неравенством (79), мы найдём:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant$$
$$\leqslant-2\omega\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2\gamma\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2M^*\sum_{i=1}^{n}|y_i|\left\{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}. \quad (81)$$

Выбрав γ достаточно малым, положив $-\omega+\gamma=-\omega_1$, где $\omega_1>0$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant-\omega_1\sum_{i=1}^{n}|y_1|^2\left[1-\frac{nM^*}{\omega_1}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{\alpha}\right]. \quad (82)$$

Последнее неравенство совпадает с неравенством (77), только все y_i заменены через $|y_i|$ и положительная величина ω_1 имеет новое значение, но эти обстоятельства на наши заключения об устойчивости тривиального решения системы (53) не повлияют. Тем самым теорема доказана.

5. Отметим ещё одну теорему, устанавливающую некоторые достаточные условия *неустойчивости* решения системы (53).

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *хотя бы один корень характеристического уравнения первого приближения* (54) *имеет положительную действительную часть,*

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, *входящие в систему* (53), *удовлетворяют условию* (А),

то тривиальное решение системы (53) *неустойчиво.*

Теорему докажем для случая, когда среди корней характеристического уравнения системы (54) нет корней с действительной частью, равной нулю.

Будем считать, что система (53) приведена к виду (71). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \geqslant 1)$ — все корни характеристического уравнения системы (54) с положительной действительной частью, тогда корни $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ будут иметь действительную отрицательную часть.

Обозначим через σ наименьшую действительную часть чисел:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, -\lambda_{m+1}, -\lambda_{m+2}, \ldots, -\lambda_n.$$

Число σ будет положительным,

$$\sigma > 0.$$

Вычислим производную от выражения $K = \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |y_i|^2$; пользуясь системами (71) и (78), получим:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\bar{y}_i - \sum_{i=m+1}^{n} y_i\bar{y}_i\right] = \sum_{i=1}^{m} 2R(\lambda_i)|y_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} 2R(\lambda_i)|y_i|^2 +$$

$$+ \gamma\left[\sum_{i=1}^{m}{}' (\bar{y}_i y_{i+1} + \bar{y}_{i+1} y_i) - \sum_{i=m+1}^{n}{}' (\bar{y}_i y_{i+1} + \bar{y}_{i+1} y_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} [\bar{y}_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) + y_i \varphi_i^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)] -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{n} [\bar{y}_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) + y_1 \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, \bar{y}_n)].$$

Заменяя $R(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $-R(\lambda_i)$ при $i = m+1, \ldots, n$ через σ, вычитая модули слагаемых всех остальных сумм, пользуясь при этом оценками так же, как это делалось при доказательстве предыдущей теоремы, получим:

$$\frac{dK}{dt} \geqslant 2\sigma \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 - 2\gamma \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 - 2M^* n \left\{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right\}^{1+\alpha},$$

или, считая γ достаточно малым и обозначая $\sigma - \gamma = \sigma_1$ (величина σ_1 будет положительной), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt} \geqslant \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \left\{1 - \frac{nM}{\sigma_1}\left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right]^{\alpha}\right\}. \tag{83}$$

Если бы тривиальное решение системы (53), а следовательно, и системы (71) было устойчивым, то для всякого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{\sigma_1}{nM}\right)^{\frac{1}{2}\alpha}$, существовало бы такое δ, что при $|y_i(t_0)| < \delta$

$(i=1, \ldots, n)$ имели бы место неравенства $|y_i(t)| < \varepsilon\,(i=1, \ldots, n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{nM}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

и неравенство (83) можно было бы, усиливая, переписать так:

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt} > \frac{1}{2}\sigma_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \geqslant \frac{1}{2}\sigma_1 \left[\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |y_i|^2\right]$$

или

$$\frac{dK}{dt} - \sigma_1 K > 0. \tag{84}$$

Умножив неравенство (84) на $e^{-\sigma_1 (t-t_0)}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\sigma_1 (t-t_0)} K\right) > 0, \tag{85}$$

откуда, интегрируя от t_0 до t и заменяя $K(t)$ его выражением, найдём:

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i(t)|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |y_i(t)|^2 > e^{\sigma_1 (t-t_0)} \left[\sum_{i=1}^{m} |y_i(t_0)|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |y_i(t_0)|^2\right].$$

Мы всегда можем считать, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |y_i(t_0)|^2 - \sum\limits_{i=m+1}^{n} |y_i(t_0)|^2$ — величина положительная; в частности, можем положить все $y_i(t_0) = 0$ при $i = m+1, \ldots, n$.

Тогда из неравенства (85) мы можем заключить, что по крайней мере одна из величин $|y_i(t)|$ сделается больше выбранного ε, каким бы малым ни было δ, что противоречит предположению об устойчивости тривиального решения. Тем самым теорема доказана.

ГЛАВА VIII.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Постановка задачи об интегрировании уравнений с частными производными.

1. Пусть искомая функция z зависит от нескольких независимых переменных: $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geqslant 2)$.

Уравнение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и частные производные от искомой функции, называется *уравнением с частными производными*. Оно имеет вид:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, \ldots\right) = 0.$$

Здесь F — данная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения* с частными производными.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с n независимыми переменными может быть написано в форме:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (1)$$

Часто употребляются упрощённые обозначения для производных первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n;$$

с их помощью уравнение (1) перепишется так:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \qquad (1')$$

В случае двух независимых переменных часто пользуются такими обозначениями: искомая функция z, независимые пере-

менные x и y, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p$, $\frac{\partial z}{\partial y} \equiv q$ (обозначения Монжа); тогда уравнение первого порядка напишется так:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{2}$$

или

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0. \tag{2'}$$

В уравнение (1) или (2) могут не входить явно искомая функция, независимые переменные; но если это — уравнение с частными производными первого порядка, то должна входить по крайней мере одна частная производная (первого порядка).

Аналогично, наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид:

$$F\left(z,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\right) = 0. \tag{3}$$

Для вторых производных иногда также вводят обозначения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \equiv p_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В этих обозначениях уравнение (3) перепишется так:

$$F(z,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ p_{11},\ p_{12},\ \ldots,\ p_{nn}) = 0. \tag{3'}$$

Наконец, в случае двух независимых переменных x, y для частных производных второго порядка часто вводят обозначения Монжа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \equiv s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv t.$$

В этих обозначениях наиболее общее уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0. \tag{4}$$

Можно поставить самую общую задачу об интегрировании системы уравнений в частных производных: имеем m искомых функций $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m$ от n независимых переменных x_1, $x_2,\ \ldots,\ x_n$; дана система m уравнений, связывающих эти искомые функции, независимые переменные и частные производные от искомых функций:

$$F_i\left(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial z_m}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1\, \partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1^2},\ \ldots\right) = 0 \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В такой общей постановке на пути к решению задачи сделано очень мало: для определённых форм заданных уравнений были доказаны теоремы существования [С. Ковалевская, Рикье и др.]. Эти теоремы предполагали данные функции зависящими аналитически от своих аргументов, и решения тоже отыскивались аналитические, в виде степенных рядов. В последние годы И. Г. Петровский получил ряд общих результатов для систем дифференциальных уравнений в частных производных без предположения об аналитичности уравнений и начальных данных. В нашем курсе мы не будем касаться этого круга вопросов.

Следует ещё упомянуть, что приходится также встречаться с системами, где число уравнений больше числа искомых функций; мы встретимся в настоящем курсе с двумя уравнениями, содержащими одну искомую функцию. Такие системы, вообще говоря, оказываются *несовместными*, т. е. не существует системы функций, удовлетворяющей всем уравнениям одновременно. Для существования общих решений такой системы необходимо выполнение добавочных условий; если эти условия оказываются также достаточными, то их называют *условиями совместности*.

2. Задачу решения или интегрирования уравнения с частными производными можно поставить таким образом: *найти все решения данного уравнения*. Естественно ожидать, что решений будет бесконечное множество, исходя хотя бы из таких соображений: обыкновенные дифференциальные уравнения можно формально рассматривать как частный случай уравнений в частных производных, когда число независимых переменных $n = 1$; но всякое обыкновенное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений (соответствующих различным значениям произвольных постоянных); мы и подавно вправе ожидать бесконечного числа решений от уравнения, содержащего более одного независимого переменного. Предварительные указания на характер произвольных элементов, могущих входить в решение уравнения в частных производных, мы можем получить из рассмотрения отдельных частных случаев, где легко найти общее решение.

Рассмотрим любое уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными x и y, не содержащее производной по y:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \tag{5}$$

В уравнение входит только частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, при вычислении которой y рассматривается как постоянное. При постоянном значении y уравнение (5) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с искомой функцией z и независимым переменным x. Если давать y различные значения, то это обыкно-

венное уравнение будет изменяться; оно содержит y как параметр. Пусть общее решение этого обыкновенного уравнения есть

$$z = \varphi(x, y, C). \tag{6}$$

Оно, очевидно, содержит параметр y и, как легко видеть, является при постоянном C решением уравнения (5). Но, для того чтобы выражение (6) было решением уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы C было постоянным относительно x; следовательно, оно может быть любой функцией от y, и мы получим наиболее общее решение уравнения в частных производных (5), если подставим на место C *произвольную функцию от* y, $\psi(y)$:

$$z = \varphi(x, y, \psi(y)). \tag{6'}$$

Итак, *общее решение* уравнения в частных производных первого порядка вида (5) *содержит одну произвольную функцию*[1]).

Пример 1. $z - px - x^2y^2 = 0$. Пишем уравнение в виде $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - xy^2$ и рассматриваем y как параметр. Мы имеем для z линейное уравнение; его общее решение есть $z = Cx - x^2y^2$. Общее решение уравнения в частных производных есть $z = x\psi(y) - x^2y^2$ (ψ — произвольная функция).

Естественно ожидать для уравнения второго порядка ещё большей степени произвола. Обратимся опять в этом случае к исследованию примеров.

Пример 2. Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Написав его в виде $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, убеждаемся в том, что $\frac{\partial z}{\partial y}$ не зависит от x; мы можем положить его равным произвольной функции от y: $\frac{\partial z}{\partial y} = \chi(y)$. Интегрируем последнее равенство по y; замечая, что постоянная интеграции есть постоянная по отношению к y, т. е. может быть любой функцией от x, и что $\int \chi(y)\,dy$ есть опять произвольная (дифференцируемая) функция от y, получаем общее решение данного уравнения:

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

---

[1]) Вхождение в решение произвольной непрерывной и дифференцируемой функции эквивалентно наличию счётного множества произвольных постоянных (параметров). Это проще всего показать на частном случае, когда произвольная функция аналитическая. В таком случае в окрестности правильной точки y_0 функция $\psi(y)$ разлагается в ряд Тейлора $\psi(y) = a_0 + a_1(y - y_0) + \ldots + a_n(y - y_0)^n + \ldots$, где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа, подчинённые лишь условиям, чтобы ряд имел отличный от нуля радиус сходимости.

где φ и ψ — произвольные функции, которые, конечно, должны быть дифференцируемы, чтобы имел смысл результат подстановки в данное уравнение. В этом случае *общее решение зависит от двух произвольных функций.*

Пример 3. Уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ (предполагается, что z зависит от x и от y); две интеграции дают: $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y)$, $z=\varphi(y)\,x+\psi(y)$, где φ и ψ — произвольные (непрерывные) функции.

Из этих частных примеров, казалось бы, можно вывести заключение, что общее решение уравнения в частных производных первого порядка зависит от одной произвольной функции, второго порядка — от двух произвольных функций и т. д. Однако такое заключение в общем случае оказывается недостаточно точным.

3. Вспомним, что в теории обыкновенных дифференциальных уравнений критерием общности решения была возможность получить из него все частные решения (по крайней мере в некоторой области). При этом частное решение было определено как решение, удовлетворяющее начальным данным Коши; теорема существования утверждала существование таких решений и их однозначную определённость начальными данными. Естественно и для уравнений в частных производных ввести такие добавочные данные, которые (при некоторых условиях) определяли бы однозначно частное решение. Такие системы данных, выделяющих частное решение для уравнений в частных производных, могут быть различного типа; с ними мы встречаемся в теории уравнений второго порядка, так называемых уравнений математической физики. Для общей формальной теории уравнений с частными производными, в частности для уравнений первого порядка, которые рассматриваются в настоящем курсе, этими дополнительными данными являются *начальные данные Коши.* Для одного уравнения m-го порядка, разрешённого относительно одной из старших производных, вида

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m}=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}},\right.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_2},\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) \tag{7}$$

начальные условия имеют вид: при $x_1=x_1^0$

$$\left.\begin{aligned} z&=\varphi_0(x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{\partial z}{\partial x_1}=\varphi_1(x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ &\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}=\varphi_{m-1}(x_2,\ \ldots,\ x_n),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ — заданные функции. *Нахождение решения уравнения* (7), *удовлетворяющего условиям* (8), *есть задача Коши.* Для уравнения (7) с начальными условиями Коши (8) существование единственного решения доказано выдающимся русским математиком С. В. Ковалевской, в предположении, что правая часть уравнения (7) и функции, входящие в условия (8), являются правильными аналитическими функциями своих аргументов в окрестности некоторой системы начальных значений этих аргументов; получаемое решение есть тоже аналитическая функция и является единственным решением в классе аналитических решений. Как мы видим, здесь и постановка вопроса и результат относятся к аналитической теории дифференциальных уравнений. Поэтому доказательства теоремы Ковалевской мы в этом курсе не будем приводить.

Для уравнения первого порядка, предполагая его разрешённым относительно одной из частных производных, например p_1:

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n), \tag{1''}$$

задачу Коши формулируют так: *найти решение* $z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *уравнения* (1″), *которое при данном начальном значении* x_1 *обращается в заданную функцию остальных независимых переменных*:

$$\text{при } x_1 = x_1^0 \quad z = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{C}$$

Существование такого решения мы докажем тем, что дадим метод его построения при помощи интеграции систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. В случае двух независимых переменных задача интеграции уравнения с частными производными, а также условия Коши допускают простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим уравнение первого порядка:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2'}$$

или, лучше, разрешённое относительно одной частной производной:

$$p = f(x, y, z, q). \tag{2''}$$

Найти решение уравнения (2′) или (2″) — значит найти функцию

$$z = \Phi(x, y), \tag{9}$$

которая в координатном пространстве (x, y, z) изображает поверхность; назовём её *интегральной поверхностью* уравнения (2′) или (2″). Итак, задача нахождения решений уравнения в частных производных есть задача нахождения интегральных поверхностей. Если рассматривать уравнение (9) как определяющее поверхность, то

касательная плоскость к ней в точке (x, y, z) выражается уравнением:

$$Z - z = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y),$$

или

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

здесь X, Y, Z — текущие координаты, p и q — угловые коэффициенты касательной плоскости. Таким образом, данное уравнение в частных производных (2′) выражает соотношение между координатами x, y, z точки искомой интегральной поверхности и угловыми коэффициентами p и q касательной плоскости к этой поверхности в этой точке. Посмотрим, как интерпретируются данные Коши для уравнения (2″); эти данные таковы:

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y). \tag{C′}$$

Уравнения (C′) определяют кривую в пространстве. Итак, *задача Коши состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через кривую* (C′).

Заметим, что кривая (C′) имеет весьма специальный вид: это плоская кривая, лежащая в плоскости $x = x_0$, параллельной yOz. Такое неравноправие переменных происходит, между прочим, оттого, что в исходном уравнении (2″) независимое переменное x играло особую роль. Если уравнение дано в более симметричной форме (2′), то и задачу Коши естественно сформулировать так, чтобы ни одну координату не ставить в исключительное положение. Эта обобщённая задача Коши такова: *найти интегральную поверхность уравнения* (2′), *проходящую через заданную кривую*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{C″}$$

При такой постановке задача Коши становится неопределённой для некоторых кривых (C″) — через некоторые кривые проходит бесконечное множество интегральных поверхностей. Эти исключительные кривые называются *характеристиками* и играют первостепенную роль в теории интеграции уравнений в частных производных первого порядка.

Примечание. Тот же геометрический язык, который для уравнений с двумя независимыми переменными пользуется трёхмерным пространством, применяется по аналогии к любому числу переменных, причём используется понятие многомерного пространства. Совокупность числовых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ мы будем называть *точкой* $(n+1)$*-мерного пространства*; решение уравнения (1′) или (1″) вида

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть *интегральная гиперповерхность* (или просто поверхность) n измерений в этом пространстве; данные Коши (C) представляют гипер-

поверхность $n-1$ измерений, через которую должна пройти искомая интегральная поверхность [1]).

5. Определив таким образом частное решение, мы можем сделать некоторые заключения об общем решении уравнения в частных производных.

Прежде всего, исходя из задачи Коши, мы можем утверждать, что совокупность всех частных решений уравнения в частных производных первого порядка получится, если давать всевозможные (допустимые) виды той функции φ от $n-1$ аргументов, которая входит в условия Коши (С); в этом смысле можно сказать, что *совокупность решений уравнения первого порядка зависит от одной произвольной функции* — именно той, которая входит в данные Коши; аналогичная совокупность частных решений уравнения m-го порядка зависит от m произвольных функций $n-1$ аргументов, составляющих условия Коши (8). Но этим не решается вопрос об общем решении, т. е. о таком выражении искомого z в функции независимых переменных, произвольных постоянных и функций, из которого можно получить любое частное решение.

Для весьма многих уравнений самый вопрос о существовании общего решения является нерешённым. Иногда (как в вышеприведённых примерах) существует общее решение, в которое входят произвольные функции и из которого получаются все частные решения, удовлетворяющие условиям Коши, если на место произвольных подставить некоторые определённые функции. Однако в большинстве случаев представление общего решения, как явно зависящего от произвольных функций, невозможно. В теории линейных уравнений в частных производных второго порядка встречаются другие формы решения, например в виде ряда, коэффициенты которого являются произвольными постоянными; решение такой формы мы назовём общим, если этими коэффициентами можно распорядиться так, чтобы удовлетворялись начальные условия. Однако для общего уравнения в частных производных нельзя утверждать существования и такого рода общего решения, кроме случая, когда уравнение и начальные данные являются аналитическими. Поэтому обычно для уравнений в частных производных ищутся частные решения, удовлетворяющие начальным данным Коши, или другим условиям, однозначно определяющим решение (например, задача Дирихле для уравнения Лапласа).

Уравнения в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией обладают двумя простыми свойствами. Во-первых, они обладают общим решением, зависящим от произвольной функции. Во-вторых, *задача интегрирования уравнения в частных производных первого порядка сводится к интегрированию системы*

---

[1]) Число измерений гиперповерхности или многообразия есть число независимых переменных, через которые взаимно однозначно и непрерывно, по крайней мере в некоторой области, выражаются координаты точек, принадлежащих данному многообразию.

обыкновенных дифференциальных уравнений. В силу этой тесной связи уравнений в частных производных первого порядка с обыкновенными дифференциальными уравнениями, естественно излагать их теорию в том же курсе, что и теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 2. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка.

1. Рассмотрим уравнение вида

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad (10)$$

где X_1, X_2, ..., X_n — данные функции независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n (мы их будем предполагать непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области), а f обозначает искомую функцию. Мы назовём это уравнение *линейным однородным уравнением в частных производных.* Решением уравнения (10) будет (дифференцируемая) функция от x_1, x_2, ..., x_n, которая по подстановке в уравнение (10) обращает его в тождество. Мы уже встретились с этим уравнением в главе VII в связи с исследованием первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений симметричного вида. Пишем, наряду с дифференциальным уравнением в частных производных (10), систему обыкновенных дифференциальных уравнений [которую мы будем называть *соответствующей уравнению* (10)]:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \qquad (11)$$

Задачи интегрирования уравнения (10) и системы уравнений (11) суть задачи эквивалентные. В самом деле, мы доказали следующую теорему (глава VII, § 5, 1):

Левая часть любого первого интеграла системы (11) *есть решение уравнения* (10); обратно, *всякое решение уравнения* (10), *приравненное произвольной постоянной, даёт первый интеграл системы* (11).

Постараемся найти вид наиболее общей функции, удовлетворяющей уравнению (10). Для этого заметим такое свойство оператора $X[f]$. Пусть $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ есть некоторая дифференцируемая функция своих аргументов, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n. Тогда легко видеть, что

$$X[\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)] = \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2} X[\psi_2] + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} X[\psi_k]. \qquad (12)$$

Пусть теперь

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_1, \quad \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_2 \ldots \\ \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_{n-1}\end{array}\right\} \qquad (13)$$

есть некоторая определённая система (независимых) интегралов системы уравнений (11), определённая в некоторой области D [1]).

По доказанной теореме $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ являются частными решениями уравнений (10), т. е. мы имеем тождества:

$$X[\psi_1]=0, \qquad X[\psi_2]=0, \ldots, X[\psi_{n-1}]=0. \qquad (14)$$

Возьмём теперь произвольную (дифференцируемую) функцию Φ от аргументов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}). \qquad (15)$$

В силу свойства (12), будем иметь тождественно:

$$X[\Phi]=0,$$

т. е. *выражение* (15) *является решением уравнения* (10).

Таким образом, мы встречаемся при изучении уравнений в частных производных с фактом, уже отмеченным в § 1: решение такого уравнения может содержать произвольные функции, тогда как решения обыкновенных дифференциальных уравнений заключали лишь произвольные постоянные. Нашей ближайшей задачей будет установить, что выражение (15) является общим решением уравнения (10), а также выяснить, какие дополнительные данные нужно ввести, чтобы из бесконечного множества решений, даваемых выражением (15), выделить одно определённое решение (задача Коши).

2. Переходим к доказательству того, что *формула*

$$f=\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \qquad (15)$$

где Φ есть произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, даёт общее решение уравнения (10), т. е. что в этой формуле содержится любое частное решение.

Пусть какое-нибудь решение уравнения (10) в области D есть $f=\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда имеем тождественно $X[\Psi]=0$, или, в раскрытой форме,

$$X_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}=0. \qquad (14')$$

Так как $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, по предположению, суть решения, то имеют место тождества (14), которые в раскрытом виде перепишутся так:

$$X_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n-1). \quad (14'')$$

---

[1]) Для теоретических рассуждений удобнее всего за систему (13) принять систему (41) главы VII.

Система уравнений (14′) и (14″) для определения n функций X_1, $X_2, \ldots, X_n$ есть линейная однородная; она допускает не равные нулю решения, и следовательно, определитель этой системы (тождественно) равен нулю. Этот определитель есть якобиан от функций Ψ, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$.

Итак, мы имеем:

$$\frac{D(\Psi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0. \tag{16}$$

Отсюда, в силу основной теоремы о якобианах, следует, что *между функциями* $\Psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ *существует функциональная зависимость*, т. е. для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в рассматриваемой области имеет место равенство (тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$):

$$F(\Psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \tag{17}$$

Заметим, что в функциональном определителе, стоящем в левой части равенства (16), заведомо один из миноров первой строки не равен тождественно нулю; в самом деле, если система (11) имела неособые начальные значения

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0,$$

причём $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то, в предположении, что в системе (11) x_n взято за независимое переменное, и первые интегралы имеют вид $\psi_i = x_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ при значениях переменных, близких к начальным,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Отсюда следует, в силу той же основной теоремы о якобианах, что соотношение (17) может быть разрешено относительно функции Ψ, и мы получаем:

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Итак, *всякое решение уравнения* (10) *даётся* (в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) *формулой* (15). Теорема доказана. Можно сказать, что формула (15) даёт общее решение уравнения (10).

Примечание. Из доказательства полученной теоремы можно вывести такое следствие: между любыми n решениями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ уравнения (10) существует фукциональная зависимость $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$; если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ независимы, то функция Φ не обращается в рассматриваемой области в тождественный нуль, так как уравнение может быть разрешено относительно φ_n.

3. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для уравнения

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{10}$$

решим задачу Коши: *найти решение уравнения* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *такое, чтобы*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{18}$$

где x_n^0 — *заданное число,* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — *заданная* (дифференцируемая) *функция своих аргументов.*

Мы предположим, что φ определена для значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в окрестности значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0$, причём точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ не является особой точкой для системы (11); далее, допустим, что $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$ (это ограничение не является очень существенным, так как если бы при значениях $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ функция X_n обращалась в нуль, мы дали бы постоянное значение тому x_i, которому соответствует X_i, не обращающееся в нуль, и задали бы начальную функцию φ от всех остальных аргументов).

При этих предположениях система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \overline{\psi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \overline{\psi}_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где ψ_i являются независимыми интегралами системы (11), а $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$ — новые переменные, может быть в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ разрешена относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ [1]).

Пусть соответствующие формулы будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

---

[1]) Если система (13) взята в виде (41) главы VII, то якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$$

при $x_i = x_i^0$ обращается в 1; следовательно, он отличен от нуля в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

При этом, когда $\overline{\psi}_i$ принимают значения:

$$\overline{\psi}_i^0 = \psi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

соответствующие функции ω_i принимают значения x_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. При наличии частных производных у функций ψ_i функции ω_i также являются дифференцируемыми (существование этих производных при дифференцируемости функций X_i доказано в § 3 главы VII). Я утверждаю, что *искомое решение уравнения* (10), *удовлетворяющее начальному условию* (18), есть:

$$f = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}). \quad (21)$$

В самом деле, во-первых, выражение (21), являясь функцией от частных решений ψ_i, само является решением уравнения (10); далее, если положить $x_n = x_n^0$, то величины ψ_i обращаются в $\overline{\psi}_i$, в силу формул (19). Но, по формулам (20), $\omega_i(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})$ равны величинам x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$; поэтому из формулы (21) получаем: при $x_n = x_n^0$

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

т. е. условие (18) выполнено.

Из построения решения очевидно, что оно *однозначно определено начальными данными* (18).

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Пишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Независимая система её первых интегралов есть

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \ \ldots, \ \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1} \quad (x_n \neq 0).$$

Общее решение данного уравнения есть

$$f = \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

т. е. наиболее общая однородная функция n пере-

менных нулевого измерения (обращение теоремы Эйлера об однородных функциях для функций нулевого измерения).

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(искомая функция обозначена буквой z).

Соответствующая система обыкновенных уравнений сводится к одному уравнению:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$$

и имеет интеграл $x^2+y^2=C$. Общее решение данного уравнения $z=\varphi(x^2+y^2)$, где φ есть произвольная функция, геометрически представляет любую поверхность вращения с осью вращения Oz. Задача Коши: $z=f(x)$ при $y=0$, где f есть данная функция; её решение: функция ψ есть x^2+y^2, следовательно, функция $\overline{\psi}$ есть x^2, откуда $x=\sqrt{\psi}$; искомое решение: $z=f(\sqrt{\psi})=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Геометрическое истолкование задачи Коши: если задано уравнение меридиана, то поверхность вращения однозначно определяется.

ЗАДАЧИ.

197. Найти геометрическое свойство поверхностей, удовлетворяющих уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Какая поверхность даёт решение задачи Коши: $z=x$ при $y=1$?

198. Найти общее решение уравнения:

$$\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

и решить задачу Коши: $f=y-z$ при $x=1$.

§ 3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка.

1. Обозначим искомую функцию через z, независимые переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Названные в заголовке уравнения имеют вид:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R, \tag{22}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ — функции (непрерывные и непрерывно дифференцируемые) от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Линейные однородные уравнения (10) являются частным случаем уравнений типа (22), когда правая часть $R\equiv 0$ и когда коэффициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ при

производных не зависят от искомой функции. В обозначениях

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \equiv p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \equiv p_2, \ \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} \equiv p_n$$

уравнение (22) напишется так:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R. \qquad (22')$$

Уравнение вида (22) может быть приведено к однородному линейному уравнению следующим приёмом. Мы *будем искать* удовлетворяющую уравнению (22) *функцию* z от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *в неявном виде*:

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (23)$$

так что *искомой функцией будет* V.

Из формулы (23) получаются значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_i}$:

$$p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Внося эти выражения в данное уравнение (22), умножив обе части на $\frac{\partial V}{\partial z}$ (мы предполагаем, очевидно, этот множитель не равным тождественно нулю и рассматриваем окрестность точки, где он не обращается в нуль) и перенося все члены в левую часть, получаем соотношение

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \qquad (24)$$

Из вывода соотношения (24) следует: в предположении, что (23) определяет z как решение уравнения (22), соотношение (24) должно удовлетворяться тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при условии, что вместо z подставлено его значение, определённое формулой (23). Если мы потребуем больше, а именно, чтобы *искомая функция* V *удовлетворяла соотношению* (24) *тождественно относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z [т. е. рассматривая в уравнении (24), наряду с $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также и z как независимое переменное], то (24) окажется линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка с искомой функцией V и $n+1$ независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Очевидно, каждое решение этого уравнения (24), содержащее z, будучи приравнено нулю, даёт соотношение вида (23), которое определит функцию z от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую данному уравнению (22). Заметим, что мы наложили дополнительное ограничение, потребовав, чтобы соотношение (24) выполнялось тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; поэтому мы не можем утверждать a priori, что указанным приёмом

получим все решения уравнения (22). Мы ещё вернёмся к этому вопросу.

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую линейному уравнению в частных производных (24):

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}. \tag{25}$$

Эта система n уравнений имеет n независимых первых интегралов; пусть это будут:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) &= C_0, \\ \psi_1(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) &= C_1, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) &= C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид:

$$V = \Phi(\psi_0,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция. Из предыдущего вывода следует, что *уравнение*

$$\Phi(\psi_0,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1}) = 0 \tag{27}$$

определяет (если удовлетворяются условия теоремы существования для неявных функций) *z как функцию от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, причём эта функция удовлетворяет данному уравнению* (22).

Пример 6. Найти решение уравнения:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = mf,$$

где m — постоянное. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая этому уравнению в частных производных, есть

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{mf};$$

система первых интегралов

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \ \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \quad \frac{f}{x_n^m} = C_n.$$

Решение, содержащее произвольную функцию Φ, будет:

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n},\ \frac{f}{x_n^m}\right) = 0.$$

Разрешая относительно последнего аргумента и затем относительно f, получим:

$$f = x_n^m \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

где Ψ — произвольная функция. Это — полное обращение теоремы Эйлера об однородных функциях (ср. пример 4).

2. Формула (27) решения дифференциального уравнения (22) выведена при дополнительном требовании, чтобы уравнение (24) удовлетворялось функцией V тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Посмотрим, насколько общей является эта формула, т. е. какие частные решения в ней заключаются.

Пусть будет

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{28}$$

какое-нибудь решение уравнения (22). Возьмём в системе первых интегралов уравнений (25) в качестве произвольных постоянных начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$; эта система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = z_0, \\ &\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{26'}$$

В главе VII, § 4, 1 доказаны существование и дифференцируемость этих интегралов по $z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ в некоторой окрестности начальной точки $(z_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если это — обыкновенная точка системы (25), в которой $P_n(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0) \neq 0$[1]). Пусть значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z для решения (26′) принадлежат рассматриваемой окрестности. Подставим в левые части равенств (26′) вместо z его выражение (28); для получившихся функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ введём обозначения:

$$\psi_k(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Замечая, что функции $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ удовлетворяют уравнению (24), мы получаем после подстановки в соответствующие тождества

[1]) Если $P_n = 0$ в рассматриваемой точке, а $P_j \neq 0$, то рассуждения не изменятся, стоит только за независимое переменное взять x_j вместо x_n. К особым точкам уравнения (24) следует причислить все точки, в которых $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$, хотя бы было $R \neq 0$.

на место z его выражения (28) систему тождеств:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi(x_1, \ldots, x_n), \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} + R(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi_k}{\partial z} = 0$$

$$(k = 0, \ 1, \ \ldots, \ n-1). \tag{29}$$

Так как, по предположению, (28) есть решение уравнения (22), то имеем тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - R(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Умножаем последнее равенство последовательно на $\frac{\partial\psi_0}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$, … …, $\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial z}$ и прибавляем к соответствующим равенствам (29). В силу определения функций Ψ_k и их производных по x_j, получаем:

$$P_1(\varphi(x_1, \ldots, x_n), \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_n} = 0$$

$$(k = 0, \ 1, \ 2, \ldots, n-1).$$

Таким образом, $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ являются системой n решений уравнения в частных производных с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$P_1(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\varphi, \ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Отсюда, в силу примечания к § 2, **2**, существует тождественная по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависимость между $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$:

$$\Phi(\Psi_0, \ \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0. \tag{27'}$$

Следовательно, существует такая функция $\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$, что по подстановке в неё вместо z выражения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы получаем тождественно нуль. Таким образом, любое решение z при у к а з а н н ы х у с л о в и я х о т н о с и т е л ь н о к о э ф ф и ц и е н т о в P_i и R удовлетворяет соотношению вида (27). В этом смысле (27) *определяет общее решение.*

Заметим, что в противоположность однородному линейному уравнению в частных производных мы могли здесь доказать представимость при помощи формулы (27) частных решений лишь при выполнении коэффициентами уравнения добавочных условий непрерывности частных производных от коэффициентов и необращения в нуль одновременно всех коэффициентов P_i. Если эти условия не выполнены, уравнение (22) может иметь решения, не входящие в формулу (27), они соответствуют обращению в нуль левой части (24) не тождественно, а лишь в силу соотношения $V = 0$. Такие решения называются *с п е ц и а л ь н ы м и*.

Пример 7. $\frac{\partial z}{\partial x}(1+\sqrt{z-x-y})+\frac{\partial z}{\partial y}=2$. Уравнение (24) имеет здесь вид:

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+2\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений есть

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Первые интегралы: 1) $z-2y=C_1$; 2) из интегрируемой комбинации $\frac{dy}{1}=\frac{dz-dy-dx}{-\sqrt{z-x-y}}$ имеем $y+2\sqrt{z-x-y}=C_2$. Общее решение получается из соотношения

$$\Phi(z-2y,\ \ y+2\sqrt{z-x-y})=0.$$

Но данное уравнение имеет ещё решение $z=x+y$. Если выражение $V=z-x-y$ подставить в левую часть уравнения для V, мы получим $-\sqrt{z-x-y}=-\sqrt{V}$; это выражение обращается в нуль только в силу равенства $V=0$. В этом примере в точках специального решения производные от коэффициентов перестают быть ограниченными.

3. Пусть в начальной точке $\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_n^0$ мы имеем:

$$P_n(\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0)\neq 0.$$

Тогда в системе (25) можно взять x_n за независимое переменное. Систему первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений (25) возьмём в виде, данном формулами (26′), причём начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots x_{n-1}^0$ изменяются в окрестности значений $\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0$, а x_n изменяется в окрестности $\overline{x}_n^0$.

Решим для уравнения (22) задачу Коши: *найти решение этого уравнения, которое при $x_n=\overline{x}_n^0$ обращается в данную дифференцируемую функцию* [определённую в окрестности значений $(\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0)$]

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Подставим в интегралы (26′) вместо x_n начальное значение $\overline{x}_n^0$, результат обозначим через $\overline{\psi}_i$; имеем:

$$\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n^0)=\overline{\psi}_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{30}$$

Формулы (26′) аналогичны формулам (42) главы VII; следовательно, их можно разрешить относительно $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и результат будет аналогичен формулам (36‴) в сноске на стр. 308 [это есть решение системы (25), принимающее при $x_n=x_n^0$ начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$]:

$$z=\varphi_0(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$

$$x_i=\varphi_i(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставим в эти формулы вместо x_n числовое значение $\overline{x}_n^0$ и заменим $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ через $\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$. Получим выражения вида:

$$\left.\begin{aligned} z &= \omega_0(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_i &= \omega_i(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Легко видеть, что формулы (31) суть результат решения уравнений (30) относительно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Решение задачи Коши даётся формулой:

$$V(z, x_1, \ldots, x_n) \equiv \omega_0(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) - \\ - \varphi[\omega_1(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})] = 0. \tag{32}$$

Докажем прежде всего, что уравнение (32) определяет z как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в окрестности значений $\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_n^0$. Для этого достаточно показать, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\substack{z=\overline{z}_0 \\ x_i=\overline{x}_i^0}} \neq 0.$$

Вычисляем эту производную:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}\right).$$

Согласно формулам (31), мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_0}\right)_{\substack{x_n=x_n^0 \\ z=z_0 \\ x_i=x_i^0}} = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \overline{\psi}_0}\right)_{\substack{z=z_0 \\ x_i=x_i^0}} = 1;$$

аналогично $\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_0 = 0$ [в силу формул (А) и (38) главы VII, § 3], а также $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_j}\right) = 1$ или 0, смотря по тому, имеем ли $i = j$ или $i \neq j$.

Далее, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Итак,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 1;$$

следовательно, эта производная не обращается в нуль в окрестности точки $(\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0)$, и формула (32) определяет z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как формула (32) является специальным видом уравнения (27'), то полученная из неё функция z есть решение уравнения (22). Наконец, легко

видеть, что она решает поставленную задачу Коши. В самом деле, при $x_n = \overline{x}_n^0$ функции ψ_i обратятся в $\overline{\psi}_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), в силу равенств (30); функции $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ от этих аргументов ввиду равенств (31), дадут соответственно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, и мы получим: $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n = \overline{x}_n^0$.

Таким образом, ***формула*** (27) (при надлежащем выборе первых интегралов) *даёт все частные решения, определяемые начальными данными Коши.*

Самое построение показывает, что решение задачи Коши — единственное в классе решений, удовлетворяющих условиям непрерывной дифференцируемости и одновременного необращения в нуль коэффициентов уравнения в точках решения.

Примечание. Для доказательства возможности решения задачи Коши мы исходили из первых интегралов специальной формы. На практике большей частью той же цели можно достигнуть, исходя из любой системы n независимых первых интегралов:

$$\psi_0(z, x_1, \ldots, x_n) = C_0, \quad \psi_i(z, x_1, \ldots, x_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (26'')$$

Схема выкладок такова: пишем уравнения (30), разрешаем их относительно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, получаем формулы (31) и находим искомое решение по формуле (32).

Пример 8. Для уравнения примера 7 найти решение, удовлетворяющее данным Коши:

$$z = 2x \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Исходим из первых интегралов $\psi_0 \equiv z - 2y = C_1$, $\psi_1 \equiv y + 2\sqrt{z - x - y} = C_2$. Подставляя значение $y = 0$, получаем:

$$z = \overline{\psi}_0, \; 2\sqrt{z - x} = \overline{\psi}_1, \quad \text{откуда} \quad z = \overline{\psi}_0, \quad x = \overline{\psi}_0 - \frac{\overline{\psi}_1^2}{4}.$$

Подставляя эти значения в данное начальное уравнение и заменяя $\overline{\psi}_i$ через ψ_i, получим искомое решение:

$$\psi_0 - 2\psi_0 + \frac{\psi_1^2}{2} = 0,$$

или $2\psi_0 - \psi_1^2 = 0$. Иначе:

$$2z - 4y - y^2 - 4y\sqrt{z - x - y} - 4z + 4x + 4y = 0,$$

или

$$4y\sqrt{z - x - y} = 4x - 2z - y^2,$$

откуда

$$z = 2x + \frac{3}{2}y^2 - 2y\sqrt{x - y + \frac{y^2}{2}}$$

(знак минус перед радикалом, как это следует из проверки, соответствует знаку плюс перед радикалом в данном уравнении).

4. Линейное уравнение между тремя переменными; геометрическое истолкование. Для случая двух независимых переменных (мы их будем обозначать x, y) система трёх переменных x, y, z допускает простое истолкование — как

координаты точки трёхмерного пространства. Эта интерпретация поможет нам глубже проникнуть в факты, связанные с линейным уравнением в частных производных. Введём обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv q$$

и напишем уравнение в виде:

$$Pp + Qq = R, \tag{33}$$

где P, Q, R — заданные (дифференцируемые) функции от x, y, z.

Искомое решение $z = f(x, y)$ представляет собой уравнение поверхности (интегральная поверхность), p и q — угловые коэффициенты её касательной плоскости в точке с координатами (x, y, z).

Уравнение этой плоскости есть

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{T}$$

Уравнение (33) относит каждой точке пространства вектор

$$(P, Q, R). \tag{V}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку (x, y, z) в направлении, даваемом векторным полем, есть

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}. \tag{D}$$

Уравнение в частных производных (33) показывает, что прямая (D) лежит в плоскости (T).

Кривые в пространстве, которые в каждой точке касаются соответствующего вектора (P, Q, R) и вообще называются векторными кривыми, для уравнения (33) *называются характеристическими кривыми или характеристиками.* Их дифференциальные уравнения суть:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{34}$$

Мы покажем, что *каждая интегральная поверхность составляется из характеристик.* В самом деле, поставим себе задачу: найти на данной интегральной поверхности $z = f(x, y)$ такие кривые, которые в каждой точке касаются вектора (V); очевидно, для проекций этих кривых на плоскость (x, y) мы получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$, где в правой части надо заменить z через функцию $f(x, y)$. Но мы можем добавить ещё одно дифференциальное уравнение; в самом деле, при перемещении по поверхности

дифференциалы связаны соотношением

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} = p + q\frac{Q}{P} = \frac{Pp + Qq}{P}.$$

В силу уравнения (33), это даёт $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, т. е. мы пришли к дифференциальным уравнениям характеристик (34). Заметим, что *система* (34) *может быть проинтегрирована без знания интегральной поверхности*, и мы получим *семейство характеристик от двух параметров*, обладающее тем свойством, что через каждую точку (x_0, y_0, z_0) пространства (точнее: той области, где выполнены условия существования и единственности решения) проходит одна характеристическая кривая. Если взять два первых интеграла системы (34):

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b; \tag{35}$$

то характеристики определятся как линии пересечения двух семейств поверхностей (35). Обратно, если на некоторой поверхности с непрерывно изменяющейся касательной плоскостью через каждую точку поверхности проходит лежащая на ней характеристика, то эта поверхность есть интегральная; в самом деле, в каждой её точке вектор (V) лежит в плоскости (T), т. е. удовлетворяется уравнение (33).

Теперь ясно, как построить интегральные поверхности; для этого достаточно из семейства характеристик (35) от двух параметров выделить семейство от одного параметра по некоторому закону, притом так, чтобы полученная поверхность имела непрерывно изменяющуюся касательную плоскость, а для этой цели достаточно установить между параметрами a и b одно произвольное соотношение

$$\Phi(a, b) = 0,$$

где Φ — дифференцируемая функция.

Исключая из этого соотношения и из уравнений (35) a и b, мы получаем уравнение интегральной поверхности:

$$\Phi[u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0. \tag{36}$$

Задача Коши может быть поставлена в обобщённой форме (см. § 1, 4): дана пространственная кривая с непрерывно изменяющейся касательной; найти проходящую через неё интегральную поверхность. Геометрическое решение этой задачи очевидно: достаточно взять совокупность характеристик, проходящих через все точки данной кривой, и они образуют искомую поверхность.

Аналитически, если линия задана уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{C''}$$

то искомая интегральная поверхность может быть получена следую-

щим образом: подставляя эти заданные выражения x, y, z в функции t в левые части уравнений (35), мы получим выражения a и b в функции t; исключая t, получим требуемое соотношение между a и b.

Для исключения t можно разрешить, например, уравнение $u[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = a$ относительно t, т. е. найти пересечение поверхности $u = a$ с кривой (C''); это невозможно, если кривая (C'') лежит на поверхности $u = a_0$, где a_0 есть постоянное; но тогда сама эта поверхность $u(x, y, z) = a_0$ есть искомая в задаче Коши интегральная поверхность. Наконец, если заданная кривая лежит на двух поверхностях $u = a_0$ и $v = b_0$, то она сама есть характеристика, и задача Коши становится неопределённой, так как каждая характеристика принадлежит бесконечному множеству интегральных поверхностей. Тогда уравнения этой характеристики суть:

$$u(x, y, z) = a_0, \quad v(x, y, z) = b_0,$$

и любая поверхность $\Phi(u, v) = 0$ проходит через эту характеристику, если только $\Phi(a_0, b_0) = 0$.

Примечание. Можно a priori определить характеристики как такие кривые, для которых задача Коши является неопределённой.

5. Мы видели, что общее решение уравнения (33) имеет вид:

$$\Phi[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0, \tag{36'}$$

где φ и ψ — некоторые определённые функции, а Φ — произвольная функция.

Легко видеть, что, обратно, дифференцируя равенство (36′) и исключая произвольную функцию Φ, мы придём к линейному уравнению в частных производных вида (33). В самом деле, дифференцируя (36′) соответственно по x и по y, получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}p\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}q\right) = 0.$$

Исключая из этих равенств $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}$, приходим к уравнению:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p & \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}p \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q & \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}q \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$p\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

т. е. мы получим линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка.

Пример 9. Уравнение всевозможных конических поверхностей с вершиной в начале координат имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)=0,$$

или $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где Φ и φ — произвольные функции.

Найдём соответствующее уравнение в частных производных. Дифференцируя уравнение во второй форме сначала по x, затем по y, получаем:

$$p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad q=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Исключая из данного уравнения и двух полученных соотношений φ и φ', приходим к уравнению:

$$p=\frac{z}{x}-\frac{qy}{x}, \text{ или } px+qy=z.$$

Характеристики уравнения даются соотношениями $\frac{z}{x}=C_1$, $\frac{y}{x}=C_2$; это — связка прямых, проходящих через начало координат.

ЗАДАЧИ.

199. Проинтегрировать уравнение $(mz-ny)p+(nx-lz)q=ly-mx$. Указать геометрический смысл характеристик и общего решения (l, m, n — постоянные числа).

Найти общее решение уравнений:

200. $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$.

201. $\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$ (b, c — постоянные).

202. $(y^3x-2x^4)p+(2y^4-x^3y)q=9z(x^3-y^3)$.

203. Для уравнения $z(x+z)p-y(y+z)q=0$ решить задачу Коши: $z=\sqrt{y}$ при $x=1$.

204. Найти уравнение в частных производных поверхностей, описанных прямою, которая движется, пересекая данную прямую под данным углом.

Проинтегрировать это уравнение.

Указание. Взять данную прямую за ось Oz.

ГЛАВА IX.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными; однако значительная часть результатов, которые мы получим, может быть распространена на случай любого числа независимых переменных. Обозначая независимые переменные буквами x, y, искомую функцию буквой z и пользуясь для частных производных обозначениями Монжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

мы ставим своей задачей разрешение уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Оказывается более простой задачей решение не одного уравнения вида (1), а системы двух *совместных уравнений* вида (1), т. е. двух уравнений, допускающих общее им обоим решение $z(x, y)$. Эту задачу мы и рассмотрим в первом параграфе. Решение мы будем интерпретировать как поверхность (интегральная поверхность).

§ 1. Система двух совместных уравнений первого порядка.

Пусть нам даны два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Мы предположим, что в некоторой области изменения переменных x, y, z, p, q эти уравнения могут быть разрешены относительно p и q. Напишем результат разрешения в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(относительно дифференцируемости правых частей мы введём ограничения в дальнейшем).

Два уравнения (2) или (3), содержащих только одну искомую функцию z, не являются, вообще говоря, совместными, т. е. не имеют общих решений.

Выведем необходимое *условие совместности* системы, написанной в форме (3). Допустим, что существует общее решение обоих уравнений z, имеющее непрерывные частные производные первого порядка и непрерывную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Подставив это решение в уравнения (3), мы получим тождества. Из этих тождеств можно найти два выражения для второй производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

или $\left(\text{заменяя } \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ в силу второго уравнения, его значением}\right)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B.$$

Аналогично из второго уравнения (3) находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A.$$

[Мы предполагаем существование и непрерывность производных $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial z}$ в окрестности начальной точки (x_0, y_0, z_0).] Приравнивая друг другу оба значения второй смешанной производной (ввиду её непрерывности, результат не зависит от порядка дифференцирования), получаем искомое необходимое условие:

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A. \tag{4}$$

В силу нашего вывода, равенство (4) должно удовлетворяться, если вместо z подставим общее двум уравнениям решение $z(x, y)$.

Если условие (4) не выполняется тождественно, то это есть уравнение между тремя переменными x, y, z; оно определит, вообще говоря, z как неявную функцию от x и y, $z=\varphi(x, y)$, и предыдущие рассуждения показывают, что решение системы (3), если оно существует, не может быть иным, как этой функцией. Прямая подстановка в систему (3) даст нам ответ на вопрос, является ли функция $z=\varphi(x, y)$ решением системы (3) или нет.

Мы оставим этот случай в стороне. Нашей главной целью является найти условия, при которых система (3) имеет бесконечное множество решений, так чтобы через каждую

точку (x_0, y_0, z_0) рассматриваемой области пространства проходила поверхность, соответствующая некоторому решению. В таком случае условие (4) должно выполняться во всякой точке этой области, т. е. тождественно по x, y, z.

Итак, *тождественное выполнение условия* (4) *необходимо для того, чтобы система* (3) *имела множество решений, зависящее хотя бы от одного произвольного постоянного.*

Покажем, что тождественное выполнение условия (4) является также достаточным для совместности системы (3). Именно, мы покажем, что при выполнении этого условия нахождение совместных решений (3) сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проинтегрируем сначала первое из уравнений (3), рассматривая в нём y как параметр. Пока этот параметр не изменяется, мы вправе рассматривать это уравнение как обыкновенное дифференциальное:

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z). \tag{3_1}$$

Начальное условие для уравнения (3_1) пусть будет $z = \zeta(y)$ при $x = x_0$, где x_0 — заданное число; таким образом, при $x = x_0$ для различных значений параметра y начальное значение ζ предполагается различным: функцию $\zeta(y)$ пока оставляем неопределённой (но дифференцируемой). Решение уравнений (3_1) имеет вид:

$$z = \varphi(x, y; x_0, \zeta(y)), \tag{5}$$

причём, в силу начального условия,

$$\varphi(x_0, y; x_0, \zeta(y)) = \zeta(y), \tag{5_1}$$

откуда, дифференцируя, находим:

$$\zeta'(y) = \varphi'_y + \varphi'_\zeta \zeta'(y). \tag{5_2}$$

Потребуем теперь, чтобы выражение (5) удовлетворяло второму из уравнений (3); это условие даёт нам возможность определить функцию $\zeta(y)$. Подставляя, мы получим:

$$\varphi'_y + \varphi'_\zeta \frac{d\zeta}{dy} = B(x, y, \varphi(x, y; x_0, \zeta(y))). \tag{6}$$

В силу существования и непрерывности производной A'_y, производная φ'_y существует и удовлетворяет уравнению в вариациях (глава VII, § 3, примечание 2):

$$\frac{d}{dx}\varphi'_y = A'_z(x, y, \varphi)\varphi'_y + A'_y(x, y, \varphi). \tag{6_1}$$

В силу того же условия существует и производная от φ по начальному значению ζ; она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dx}\varphi'_\zeta = A'_z(x, y, \varphi)\varphi'_\zeta. \tag{6_2}$$

Формулы (6_1) и (6_2) доказывают существование непрерывных производных φ''_{yx} и $\varphi''_{\zeta x}$. При этом φ'_ζ, как решение однородного линейного уравнения, нигде не обращается в нуль.

Разрешаем уравнение (6) относительно $\frac{d\zeta}{dy}$:

$$\frac{d\zeta}{dy} = \frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta}. \tag{7}$$

Левая часть равенства (7) есть функция одного y; посмотрим, при каких условиях то же имеет место для правой части (7). Вычисляя производную правой части по x, мы в числителе получим выражение:

$$[B'_x(x, y, \varphi) + B'_z(x, y, \varphi)\varphi'_x - \varphi''_{yx}]\varphi'_\zeta - \varphi''_{\zeta x}[B(x, y, \varphi) - \varphi'_y]. \tag{7_1}$$

В силу сделанного выше замечания, вторые производные $\varphi''_{\zeta x}$ и φ''_{yx} существуют; мы заменяем в (7_1) φ'_x через $A(x, y, \varphi)$ и, далее, при помощи уравнений (6_1), (6_2) заменяем $\varphi''_{\zeta x}$ и φ''_{yx} через их выражения; после упрощений получаем:

$$\varphi'_\zeta(B'_x + B'_z A - A'_z B - A'_y). \tag{7_2}$$

Выражение в скобках в (7_2) тождественно равно нулю по условию, т. е. правая часть равенства (7), действительно, не зависит от x; это есть обыкновенное дифференциальное уравнение с искомой функцией $\zeta(y)$ и независимым переменным y. Чтобы выяснить, что его правая часть в наших предположениях удовлетворяет условию Липшица, преобразуем его. Заметим, что, ввиду независимости правой части от x, мы можем во всех выражениях в правой части заменить x на x_0. А в этом случае, применяя тождества (5_1) и (5_2) к уравнению (6), эквивалентному (7), находим:

$$\frac{d\zeta}{dy} = B(x_0, y, \zeta(y)). \tag{8}$$

Правая часть уравнения (8) удовлетворяет условию существования и единственности решения вследствие существования непрерывной производной B'_z. Интегрируя (8), при начальном условии $\zeta(y_0) = z_0$, мы получаем:

$$\zeta = \psi(y;\, y_0,\, z_0), \text{ причём } \psi(y_0;\, y_0,\, z_0) = z_0. \tag{8'}$$

Подставляя это решение в выражение (5), находим решение системы уравнений (3):

$$z = \varphi\left(x, y; x_0, \psi(y; y_0, z)\right), \tag{5_3}$$

которое при $x = x_0$, $y = y_0$ обращается в z_0. В силу построения и свойства единственности тех обыкновенных дифференциальных уравнений, которые мы интегрировали, мы приходим к выводу: *при наличии непрерывных частных производных* A'_y, A'_z, B'_x, B'_z *и при выполнении условий интегрируемости система* (3) *имеет единственное решение* $z = \Phi(x, y)$, *принимающее при* $x = x_0$, $y = y_0$ *заданное значение* z_0.

Примечание 1. Общее решение системы (3) представляет семейство поверхностей от одного параметра. В самом деле, мы получим все решения в рассматриваемой области, если придадим x_0 и y_0 численные значения $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ и будем рассматривать z_0 как произвольное постоянное C. Решение (5_3) будет иметь вид:

$$z = \Phi(x, y, C). \tag{5_4}$$

Уравнение (5_4) разрешимо относительно $C \equiv z_0$. В самом деле, решение (8′) уравнения (8) разрешимо относительно z_0: меняя роли начальных координат (y_0, z_0) и текущих координат (y, ζ), мы имеем:

$$z_0 = \psi(y_0; y, \zeta).$$

С другой стороны, решение (5) разрешимо относительно начального значения ζ, и мы имеем:

$$\zeta = \varphi(x_0, y_0; x, z).$$

Подставляем последнее выражение на место ζ в предыдущее равенство:

$$\psi\left(y_0; y, \varphi(x_0, y_0; x, z)\right) = z_0. \tag{5_5}$$

Легко убедиться в том, что левая часть равенства (5_5) допускает непрерывные производные по x, y, z.

Примечание 2. В приведённых теоретических рассуждениях мы при интегрировании уравнения (3_1) брали произвольное постоянное $\zeta(y)$ как начальное значение z при $x = x_0$ и любом y. На практике можно находить общее решение этого уравнения, содержащее любое произвольное C, и затем заменять это постоянное через искомую функцию $u(y)$; уравнение вида (7) для определения этой функции, как легко убедиться (если все производные существуют), также не зависит от x. Переменные x и y можно, конечно, поменять местами.

Пример 1.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz.$$

Составляем выражение:

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = z + (1+y)(z^2+2xz) - 2z - \\ - 2(z+x)(z+yz) = z[-1 - z(1+y)].$$

Это выражение не равно нулю тождественно; приравнивая его нулю, получаем для значения z: $z=0$ и $z=-\frac{1}{1+y}$. Подстановкой убеждаемся в том, что первое значение даёт решение нашей системы, а второе — нет.

Пример 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{2y^2} + \frac{2z}{y} - ay^2$ (Имшенецкий). Условие совместности

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 2ay - \frac{2}{y}ay^2 = 0$$

выполняется тождественно. Интегрируем указанным в примечании 2 способом. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2, \quad z = axy^2 + u(y);$$

подставляем во второе:

$$2axy + u'(y) = \frac{b}{2y^2} + 2axy + \frac{2u}{y} - ay^2, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = \frac{b}{2y^2} - ay^2,$$

линейное уравнение первого порядка относительно u. Написав его в виде:

$$y^{-2}\,du - 2y^{-3}u\,dy = \frac{b}{2}y^{-4}\,dy - a\,dy,$$

находим

$$y^{-2}u = -\frac{b}{6y^3} - ay + C, \text{ откуда } u = \frac{-b}{6y} - ay^3 + Cy^2.$$

Подставляя это значение в найденное выражение для z, находим общее решение системы:

$$z = -\frac{b}{6y} + Cy^2 + ay^2(x-y).$$

§ 2. Уравнение Пфаффа.

1. Этим именем называется уравнение:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{9}$$

где P, Q, R — данные в некоторой области D функции от x, y, z, удовлетворяющие условиям непрерывности и дифференцируемости, которые будут ясны из дальнейшего.

Сначала исследуем геометрическое значение уравнения (9). В каждой точке рассматриваемой области пространства задан некоторый вектор (P, Q, R), т. е. задано векторное поле; так как уравнение (9) переходит в равносильное при умножении на любой множитель, отличный от нуля, то, в сущности, нам задано только направление вектора, или, иначе, задано поле направлений. Мы допускаем, что ни в одной точке области не имеют места одновременно равенства $P = Q = R = 0$ (точки обращения одновременно в нуль, P, Q, R, являются особыми).

Уравнение (9) показывает, прежде всего, что x, y, z не могут оставаться независимыми в области D, так как иначе dx, dy, dz были бы независимыми приращениями, и в области D мы имели бы $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$, $R \equiv 0$, против условия. Следовательно, между этими переменными существует по крайней мере одно соотношение, и совокупность значений x, y, z, удовлетворяющих уравнению (9), есть (при некоторых естественных ограничениях) многообразие числа измерений $\leqslant 2$ (интегральное многообразие).

Очевидно, что уравнению (9) удовлетворяет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, (x_0, y_0, z_0 — постоянные). Мы считаем это решение тривиальным, и в дальнейшем не будем его рассматривать. Таким образом, число измерений интегрального многообразия будет у нас $\geqslant 1$. Само уравнение (9) показывает, что бесконечно малое перемещение dx, dy, dz вдоль интегрального многообразия из точки x, y, z перпендикулярно к направлению векторного поля в этой точке (т. е. всякая касательная прямая к многообразию перпендикулярна к соответствующему вектору). Ясно, что задача нахождения интегрального многообразия уравнения (9) будет носить различный аналитический характер, смотря по тому, ищем ли мы интегральное многообразие двух измерений или одного измерения.

2. Предположим сначала, что искомое многообразие двумерное. Допустим, что в окрестности некоторой точки (x_0, y_0, z_0) его можно представить в форме: $z = \varphi(x, y)$. Тогда z будет искомой функцией, а x и y — двумя независимыми переменными. Из формулы (9) мы получим выражение для дифференциала z:

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

(мы должны предположить, что $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$). С другой стороны, для выражения полного дифференциала функции z мы имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Из этих двух равенств вытекает, в силу независимости дифференциалов dx и dy, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}. \tag{10}$$

Мы получаем систему двух уравнений вида (3). Как мы видели в предыдущем параграфе, вообще говоря, эта система не имеет решения, т. е. уравнение Пфаффа (9) не допускает интегрального многообразия двух измерений. На геометрическом языке это значит, что векторное поле (P, Q, R), вообще говоря, не допускает семейства поверхностей, которые были бы в каждой точке ортогональны к направлению соответствующего вектора. Если же такое семейство существует, то говорят, что уравнение Пфаффа *вполне интегрируемо* или *интегрируемо одним соотношением*. Для существования такого семейства интегральных многообразий двух измерений необходимо и достаточно выполнения условия (4), которое для уравнения (10) напишется в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{R}\right)\frac{Q}{R}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{R}\right)\frac{P}{R}=0.$$

Производя дифференцирования, умножая на не равный нулю множитель R^3 и меняя знаки, получим:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \qquad (11)$$

Условие (11) имеет вполне симметричную форму относительно P, Q, R и x, y, z. Если бы в начальной точке было $R=0$, но, например, $P(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то при выполнении условия (11) мы нашли бы кусок интегрального многообразия двух измерений в форме $x=\psi(y, z)$.

При тождественном выполнении условия (11) *уравнение Пфаффа интегрируемо одним соотношением. Это условие является необходимым и достаточным.*

Покажем, что, обратно, *всякое семейство поверхностей от одного параметра* (при условии существования надлежащих производных) *является общим решением некоторого вполне интегрируемого уравнения Пфаффа.*

Напишем данное семейство в виде:

$$\Phi(x, y, z)=C. \qquad (12)$$

Дифференцируя соотношение (12), получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0.$$

Последнее уравнение допускает умножение на произвольную функцию от x, y, z; таким образом, (12) является интегральным многообразием для уравнения Пфаффа вида (9), причём необходимо имеют место равенства:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{R}=\mu(x, y, z). \qquad (13)$$

Разрешая уравнение (5_4), дающее общее решение вполне интегрируемого уравнения Пфаффа, относительно постоянного C, мы можем привести его к виду (5_5) или (12); следовательно, всегда имеют место соотношения (13). Иначе их можно переписать так:

$$\mu P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{14}$$

а само уравнение (9) по умножении на μ примет вид:

$$\mu (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0, \tag{9'}$$

или

$$d\Phi = 0.$$

Таким образом, *для вполне интегрируемого уравнения Пфаффа всегда существует интегрирующий множитель* μ, *по умножении на который левая часть становится полным дифференциалом* некоторой функции от трёх переменных.

Из предыдущего очевидно, что и обратно, если существует интегрирующий множитель уравнения (9), то оно приводится к виду (9′) и интегрируется одним соотношением $\Phi = C$. Можно проверить это непосредственной выкладкой. По предположению, существует интегрирующий множитель μ уравнения (9), т. е. имеют место соотношения (14). Дифференцируем первое из них по y и приравниваем результату дифференцирования второго по x; далее приравниваем результаты дифференцирования второго по z и третьего по y; наконец, третьего по x и первого по z; получаем, перенося члены с μ в одну сторону, а члены с производными от μ в другую:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y},$$

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z},$$

$$\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Умножая полученные три уравнения, соответственно, на R, P, Q, складывая и деля на множитель μ, не равный нулю (по крайней мере там, где поверхность (12) не имеет особой точки), получаем соотношение (11). Таким образом, если существует интегрирующий множитель для уравнения (9), то условие полной интегрируемости выполнено.

Примечание 1. Можно дать геометрическое истолкование условию полной интегрируемости в форме (4). Пусть мы исходим из точки (x, y, z) интегрального многообразия и продвигаемся по этому многообразию в точку $(x + dx, y)$; тогда получим значение:

$$z + \frac{\partial z}{\partial x}dx = z + A\,dx;$$

далее, переходим от точки $(x+dx,\ y)$ к точке $(x+dx,\ y+dy)$, не сходя с интегрального многообразия; соответствующее значение z будет:

$$z+A\,dx+\frac{\partial}{\partial y}(z+A\,dx)\,dy=z+A\,dx+B\,dy+(A'_y+A'_zB)\,dx\,dy.$$

Если мы продвинемся по интегральному многообразию сначала до точки $(x,\ y+dy)$, а затем до точки $(x+dx,\ y+dy)$, то соответствующее значение z будет:

$$z+A\,dx+B\,dy+(B'_x+B'_zA)\,dx\,dy.$$

Условия (4) выражают, что эти значения (с точностью до бесконечно малых порядка выше второго) равны, т. е. что значение функции z в бесконечно близкой точке не зависит от пути, по какому мы пришли в эту точку,

Примечание 2. Если μ есть какой-нибудь интегрирующий множитель уравнения (9), а $\Phi(x,\ y,\ z)=C$ — общее решение этого уравнения, то легко видеть, что наиболее общий вид интегрирующего множителя есть $\mu_1=\mu F(\Phi)$, где F — произвольная функция.

Примечание 3. Ввиду симметрии относительно x, y, z уравнения Пфаффа в форме (9), его можно привести к любой из трёх форм:

$$1)\ dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}\,dy,\quad 2)\ dx=-\frac{Q}{P}dy-\frac{R}{P}\,dz;$$

$$3)\ dy=-\frac{P}{Q}dx-\frac{R}{Q}\,dz.$$

Следовательно, в случае полной интегрируемости оно приводится к любой из трёх систем двух уравнений в частных производных:

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R};\quad 2)\ \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{Q}{P},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{R}{P};$$

$$3)\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{P}{Q},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{R}{Q}.$$

Этим произволом можно пользоваться при решении задач, выбирая наиболее простое уравнение для начального интегрирования.

3. Рассмотрим теперь случай, когда для уравнения Пфаффа (9) не выполняется условие полной интегрируемости (11). Из предыдущего следует, что в таком случае не существует интегральных многообразий двух измерений. Будем тогда искать интегральные многообразия одного измерения. В этом случае будет только одно независимое переменное; примем за него x.

Уравнение (9) можно теперь написать в виде:

$$P(x,\ y,\ z)+Q(x,\ y,\ z)\frac{dy}{dx}+R(x,\ y,\ z)\frac{dz}{dx}=0. \qquad (15)$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя искомыми функциями. Задача его интегрирования заключает большую степень произвола. Мы можем задать произвольно одну искомую функцию, например

$$z = f(x); \tag{16}$$

тогда, вставляя в уравнение (15), получим:

$$P(x, y, f(x)) + R(x, y, f(x)) f'(x) + Q(x, y, f(x)) \frac{dy}{dx} = 0$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение с одной искомой функцией y; его общее решение пусть будет (мы предполагаем, что выполнены условия теоремы Коши, например, что существуют производные P'_y, Q'_y, R'_y и что в начальной точке $Q \neq 0$):

$$y = g(x, C). \tag{17}$$

Совокупность уравнений (16) и (17) даёт интегральное многообразие одного измерения для уравнения Пфаффа (9).

Можно дать первое соотношение в общей форме $\Psi(x, y, z) = 0$, или

$$z = \varphi(x, y). \tag{16_1}$$

Подставляя это значение z в уравнение (15), получаем:

$$P(x, y, \varphi(x, y)) + R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + \left[Q(x, y, \varphi(x, y)) + R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{dy}{dx} = 0$$

— опять обыкновенное дифференциальное уравнение между x и y.

Вводя соответствующие предположения для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши, и обозначая решение этого уравнения через $y = \psi(x, C)$, мы получим уравнения интегрального многообразия одного измерения в виде:

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad y = \psi(x, C). \tag{17_1}$$

Таким образом, наиболее общее *интегральное многообразие одного измерения, удовлетворяющее уравнению Пфаффа, зависит от одной произвольной функции и затем ещё от одного произвольного постоянного.*

Легко дать геометрическую интерпретацию полученному результату. Произвольная функция в виде (16) представляет произвольный цилиндр с образующими, параллельными оси Oy, а в виде (16_1) — вообще произвольную поверхность. Совокупность уравнений (16_1) и (17) или (17_1) представляет семейство кривых от одного параметра, лежащих на этой поверхности (решение обыкновенного дифференциального уравнения между x и y даёт уравнение проекций кривых

этого семейства на плоскость xOz). Таким образом, интегральные кривые уравнения Пфаффа на произвольной заданной поверхности составляют семейство от одного параметра.

Примечание. Если уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, можно также методом настоящего раздела разыскивать для него интегральные кривые. При этом мы получим следующий результат. Уравнение (9) допускает интегрирующий множитель $\mu(x, y, z)$; пусть $\mu(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=d\Phi(x, y, z)$; уравнение, полученное подстановкой (16_1), вида:

$$\left(P+R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx+\left(Q+R\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy=0,$$

очевидно, допускает интегрирующий множитель

$$\bar{\mu}=\mu(x, y, \varphi(x, y)),$$

так как по умножении на него левая часть этого уравнения обратится в полный дифференциал $d\Phi(x, y, \varphi(x, y))$.

Итак, интегральные кривые определяются двумя уравнениями:

$$z=\varphi(x, y), \quad \Phi(x, y, \varphi(x, y))=C,$$

или, что то же,

$$\Phi(x, y, z)=C, \quad z=\varphi(x, y).$$

Мы приходим к заключению: в случае полной интегрируемости уравнения Пфаффа, интегральными многообразиями одного измерения являются произвольные кривые, расположенные на интегральных поверхностях. Этот факт геометрически очевиден.

4. Пфаффовы формы. Пфаффовой формой называется выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n)\,dx_i.$$

Теория пфаффовых форм представляет хорошо развитый отдел анализа[1]). Мы приведём здесь некоторые результаты, касающиеся пфаффовых форм от трёх переменных,

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{A}$$

где P, Q, R — данные функции от x, y, z; для дальнейших выводов мы их предположим непрерывно дифференцируемыми два раза. Рассмотрим приведение формы (A) к простейшему, каноническому виду. Здесь могут представиться три случая:

1) Форма (A) представляет точный дифференциал; следовательно, существует такая функция $u(x, y, z)$, что имеет место равенство:

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=du. \tag{A_1}$$

---

[1]) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947, и Э. Картан, Интегральные инварианты.

Замечая, что в таком случае $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$, $R=\frac{\partial u}{\partial z}$, мы из сравнения различных выражений для вторых смешанных производных получаем три необходимых условия для представления формы (A) в виде (A_1):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{B$_1$}$$

Легко убедиться в том, что эти условия также достаточны для представления формы Пфаффа в виде (A_1), причём для u получаем значение:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+C,$$

где C — произвольная постоянная (ср. главу II, § 3, **1**).

2) Условия (B_1) не выполняются, но имеет место тождество:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{B$_2$}$$

В таком случае, как мы видели, выражение (A) допускает интегрирующий множитель; в силу соотношений (13), меняя обозначения $\left(\frac{1}{\mu}=u,\ \Phi=v\right)$, мы можем придать пфаффовой форме вид:

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u\,dv. \tag{A$_2$}$$

3) Не выполнены ни условия (B_1), ни (B_2). Покажем, что в этом случае можно от формы (A) отнять полный дифференциал так, что для разности будет выполнено условие (B_2). Итак, ищем такую функцию $u(x, y, z)$, что если положить

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz-du=P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz,$$

то будет выполнено соотношение

$$P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial y}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)=0. \tag{B$_3$}$$

Заменяя в соотношении (B_3) P_1, Q_1, R_1 их выражениями:

$$P_1=P-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q_1=Q-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad R_1=R-\frac{\partial u}{\partial z},$$

мы после приведений получим для u уравнение:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{C}$$

Соответствующая этому линейному неоднородному уравнению в частных производных система обыкновенных дифференциальных уравнений есть

$$\frac{dx}{Q'_z-R'_y}=\frac{dy}{R'_x-P'_z}=\frac{dz}{P'_y-Q'_x}=$$
$$=\frac{du}{P(Q'_z-R'_y)+Q(R'_x-P'_z)+R(P'_y-Q'_x)}. \tag{C$'$}$$

Все условия для существования решения (необращение в нуль некоторых знаменателей, дифференцируемость) выполнены, и в качестве u мы можем взять любое решение уравнения (C). Замечая, что форма $P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$ подходит под случай 2), мы в рассматриваемом случае получаем канонический вид пфаффовой формы:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du + v\,dw. \tag{A_3}$$

Итак, *форма* (A) *приводится к одному из трёх канонических видов*:

$$du, \quad u\,dv, \quad du + v\,dw.$$

Наименьшее количество переменных, через которые может быть выражена пфаффова форма, определяет её класс. Итак, пфаффова форма от трёх переменных может принадлежать к I, II или III классу.

Приравнивая форму Пфаффа нулю, получаем уравнение Пфаффа. В первых двух случаях оно допускает интегральное соотношение двух измерений, соответственно $u = \text{const}$. и $v = \text{const}$. В последнем случае мы уже знаем, что существуют интегральные соотношения только одного измерения. Заметим, что если форма приведена к виду (A_3), эти соотношения будут содержать только произвольную функцию и её производную, притом в явном виде и не под знаком квадратуры. В самом деле, мы имеем уравнение:

$$du + v\,dw = 0.$$

Положим (первое соотношение) $u = \varphi(w)$, где φ — произвольная функция; тогда из уравнения получаем второе соотношение: $v = -\varphi'(w)$.

Пример 3. $yz\,dx + xz\,dy + xyz\,dz = 0$. Уравнение допускает, очевидно, интегрирующий множитель $\frac{1}{xyz}$; по умножении на него переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + dz = 0.$$

Интегральное соотношение $xye^z = C$.

Пример 4. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z\,dz = 0$. Условие интегрируемости

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$$

$$= (2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)(0 - 0) + 1(0 - 4xz) + 2z(2x - 0) = 0$$

выполняется. Считая x за постоянное, следовательно, $dx = 0$, интегрируем уравнение между y и z: $\frac{\partial y}{\partial z} = -2z$; получаем: $y + z^2 = u(x)$. Согласно общей теории, в результате подстановки в начальное уравнение мы должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение между x и u; и действительно, находим: $(2x^2 + 2xu + 1)\,dx + du = 0$. Это — линейное уравнение относительно u; его общее решение:

$$u = e^{-x^2}\left(C + \int e^{x^2}(-2x^2 - 1)\,dx\right) = Ce^{-x^2} - x.$$

Разрешая относительно C и заменяя u его значением, получаем:

$$e^{x^2}(x+y+z^2)=C.$$

Пример 5. Определить проекции на плоскость xOy семейства кривых, определяемых на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ уравнением Пфаффа:

$$x\,dx+y\,dy+c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dz=0.$$

Данное уравнение Пфаффа не удовлетворяет условию интегрируемости. Поэтому определяем z из заданного конечного уравнения и вставляем полученное значение dz в уравнение Пфаффа:

$$z=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$dz=-c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right),$$

$$x\,dx+y\,dy-c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)=0,$$

откуда

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2=C.$$

Пример 6. $y\,dx+z\,dy+x\,dz=0$. Условия (B_1) и (B_2) настоящего параграфа не выполнены; имеем случай 3). Составляем уравнение (C):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$$

Общее решение этого уравнения есть $u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2+\psi(x-y,\,y-z)$ (ψ — произвольная функция). Нам удобно взять такое решение уравнения (C):

$$u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2-\frac{1}{12}(x-y)^2-\frac{1}{12}(y-z)^2-\frac{1}{12}\{(x-y)+(y-z)\}^2=$$
$$=\frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Вычитаем из левой части уравнения du; получаем пфаффову форму:

$$y\,dx+z\,dy+x\,dz-du=\frac{1}{2}\{(y-z)\,dz+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\}.$$

Для этой формы условие (B_2) выполнено; легко убедиться в том, что она допускает интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{(x-y)^2}$, причём

$$\frac{1}{2(x-y)^2}\{(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\}=\frac{1}{2}\,d\,\frac{z-x}{x-y}.$$

Отсюда мы имеем: $v=(x-y)^2$, $w=\frac{1}{2}\frac{z-x}{x-y}$, и форма, стоящая в левой части данного уравнения, допускает каноническое представление вида (A_3):

$$y\,dx+z\,dy+x\,dz=d\,\frac{1}{2}(xy+yz+zx)+(x-y)^2\,d\,\frac{1}{2}\,\frac{z-x}{y-x}.$$

Два соотношения, дающие интегральные многообразия одного измерения, мы получаем в виде:

$$xy+yz+zx=\varphi\left(\frac{z-x}{x-y}\right),\quad (x-y)^2=-\varphi'\left(\frac{z-x}{x-y}\right),$$

где φ — произвольная функция.

ЗАДАЧИ.

Проверить условия интегрируемости и найти интегральные многообразия уравнений:

205. $(yz-z^2)\,dx-xz\,dy+xy\,dz=0.$

206. $(z-y)^3(z-2x+y)\,dx+(x-z)^3(x-2y+z)\,dy+$
$+(y-x)^3(y-2z+x)\,dz=0.$

Указание. Ввести вместо x и y новые переменные: $y-z=u$, $z-x=v$.

207. $z(1-z^2)\,dx+z\,dy-(x+y+xz^2)\,dz=0.$

208. $(3x^2+yz)\,y\,dx-x^2\,dy+(x+2z)\,y^2\,dz=0.$

209. $(1-4x)\,dx+(1+4y)\,dy-4z\,dz=0$; начальные условия $x=y=z=1$.

210. $dx+(y+z)\,dy+z\,dz=0.$

§ 3. Полный, общий и особый интегралы уравнения в частных производных первого порядка.

1. Прежде чем дать способ решения одного нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, постараемся изучить ту форму, в которой целесообразно искать решение такого уравнения. Для простоты рассуждений и для геометрической наглядности мы остановимся на случае трёх переменных: независимые переменные x, y; искомая функция z.

Мы будем систематически применять обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

Общее уравнение в частных производных первого порядка может быть записано в виде:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{1}$$

где F — данная функция пяти аргументов; надо ввести определённые ограничения относительно её дифференциальных свойств. Достаточно потребовать существования и непрерывности вторых частных производных от F по всем аргументам. В левую часть уравнения (1), по определению, непременно входит хоть одна из производных p, q; предположим, что это есть p. Тогда уравнение (1) может быть разрешено относительно p (по крайней мере в окрестности тех значений

аргументов, которые обращают F в нуль и для которых $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0\Big)$. Мы, наряду с уравнением (1), будем также рассматривать уравнение в форме, разрешённой относительно p:

$$p = f(x, y, z, q)\,^{1)}. \tag{18}$$

Решение уравнения в частных производных первого порядка, зависящее от двух произвольных постоянных (независимых), называется ***полным интегралом***. Мы будем записывать полный интеграл в неявной форме:

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{19}$$

или же в форме, разрешённой относительно z:

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{19$_1$}$$

Можно также определить полный интеграл как такое соотношение между тремя переменными и двумя произвольными постоянными, из которого и из соотношений, получаемых его дифференцированием по независимым переменным, получается, путём исключения постоянных, данное уравнение.

Покажем, что два определения эквивалентны. При этом мы будем пользоваться формой уравнения (18) и формой полного интеграла (19_1).

Пусть, во-первых, дано, что (19_1) есть решение уравнения (18), то-есть имеет место тождество (по x, y, a, b):

$$\varphi'_x(x, y, a, b) = f(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)). \tag{A}$$

Мы имеем равенства:

$$z = \varphi(x, y, a, b), \tag{19$_1$}$$

$$p = \varphi'_x(x, y, a, b), \tag{19$_2$}$$

$$q = \varphi'_y(x, y, a, b). \tag{19$_3$}$$

Покажем, что в результате исключения параметров a, b из уравнений (19_1), (19_2), (19_3) мы придём к уравнению (18). Мы будем определять параметры a и b из уравнений (19_1) и (19_3) и полученные выражения внесём в равенство (19_2). Заметим, что это разрешение возможно по крайней мере в некоторой области изменения переменных. В самом деле, если бы якобиан

$$\frac{D(\varphi, \varphi'_y)}{D(a, b)}$$

[1]) Это разрешение невозможно, если правая часть (18) не содержит p; тогда она непременно содержит q, так как иначе мы не имели бы уравнения в частных производных. Меняя в этом случае роль переменных, мы без ограничения общности всегда можем представить уравнение (1) в виде (18), если только оно вообще допускает действительное решение относительно p или q.

тождественно равнялся нулю, то, так как $\frac{\partial \varphi}{\partial a} \neq 0$ (φ действительно зависит от a), уравнения (19_1) и (19_2) дали бы

$$q = \chi(z, x, y)\,^{1)}. \tag{18_1}$$

Функция z удовлетворяет двум уравнениям (18) и (18_1), которые могут быть разрешены относительно p, q, т. е. z удовлетворяет двум совместным уравнениям первого порядка. Мы исследовали такие системы в § 1 настоящей главы и видели, что их общее решение не может содержать более одной произвольной постоянной. Это противоречит нашему предположению, что решение (19_1) содержит две существенные произвольные постоянные.

Итак, якобиан (B) не равен тождественно нулю. Следовательно, уравнения (19_1) и (19_3) в некоторой области могут быть разрешены относительно a и b, и мы получим:

$$a = \psi_1(x, y, z, q), \; b = \psi_2(x, y, z, q). \tag{20}$$

Таким образом, мы имеем тождества:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, y, \psi_1(x, y, z, q), \; \psi_2(x, y, z, q)) = z, \\ &\varphi'_y(x, y, \psi_1(x, y, z, q), \; \psi_2(x, y, z, q)) = q, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и из определения обратного преобразования тождества:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x, y, \varphi(x, y, a, b), \; \varphi'_y(x, y, a, b)) = a, \\ &\psi_2(x, y, \varphi(x, y, a, b), \; \varphi'_y(x, y, a, b)) = b. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя значения (20) в равенство (19_2), получаем:

$$p = \varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, z, q), \; \psi_2(x, y, z, q)). \tag{C}$$

Покажем, что правая часть равенства (C) тождественна с правой частью уравнения (18). Подставив в тождество (A) вместо a и b их выражения (20), мы получим в левой части:

$$\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, z, q), \; \psi_2(x, y, z, q)),$$

а в правой части, принимая во внимание тождества (21),

$$f(x, y, z, q).$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, z, q), \; \psi_2(x, y, z, q)) \equiv f(x, y, z, q), \tag{D}$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь, обратно, уравнение (18) получено исключением a и b из соотношений (19_1), (19_2), (19_3), то-есть имеет место тождество (D). Подставим в обе части этого тождества значения z, q, даваемые формулами (19_1), (19_3). В силу тождеств (22), получим тождество (A), т. е. (19_1) есть решение уравнения.

Примечание. *Если уравнение* (19_1) *явно не содержит* z, *то, наряду с решением* $z = \varphi(x, y)$, *решением является также* $z = \varphi(x, y) + C$,

---

[1]) См., например, В. Немыцкий и др., Курс математического анализа, т. II, гл. XII, теорема 1.

то есть можно искать полный интеграл, содержащий один из параметров аддитивно,

$$z = \varphi(x, y, a) + b. \tag{19_4}$$

Обратно, если полный интеграл имеет форму (19_4), то уравнения (19_2), (19_3) содержат один параметр a, и в результате его исключения мы получим уравнение, связывающее p и q и не содержащее явно z.

Если брать уравнение в форме (1) и полный интеграл в неразрешённом виде (19), то мы можем сказать, что уравнение (1) эквивалентно уравнению, получаемому исключением a и b из системы:

$$\left.\begin{aligned} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

2. Полный интеграл, т. е. решение, зависящее от двух произвольных постоянных, однозначно определяет, как мы видели, то уравнение в частных производных, которому он принадлежит. По аналогии с линейными уравнениями в частных производных мы не вправе, однако, ожидать, что получим все решения уравнения в частных производных, придавая произвольным постоянным всевозможные числовые значения, ибо для названного частного типа уравнений мы убедились, что общее решение зависело от произвольной функции. Лагранж показал, однако, что все решения уравнения в частных производных первого порядка могут быть получены из полного интеграла путём вариации постоянных; при этом требуются только операции дифференцирования и исключения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$p = f(x, y, z, q) \tag{18}$$

и его полный интеграл

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{19_1}$$

Пусть теперь a и b будут некоторые функции от x и y.

Если мы определим в этих предположениях две функции p и q равенствами:

$$p = \varphi'_x(x, y, a, b), \tag{19_2}$$

$$q = \varphi'_y(x, y, a, b), \tag{19_3}$$

не предрешая вопроса о том, будут ли p и q частными производными от z, то из первого определения полного интеграла следует, что функции z, p, q, определённые формулами (19_1), (19_2), (19_3), обращают уравнение (18) в тождество по x, y, a, b, т. е., в частности, при любых функциях a и b. Подберём теперь функции a и b

от x и y таким образом, чтобы выражение (19_1) было решением дифференциального уравнения (18), т. е. чтобы выражения (19_2) и (19_3) были частными производными от z соответственно по x и по y. Дифференцируя (19_1) по x и по y в предположении, что a и b суть функции x и y, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi'_x + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \varphi'_y + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Сравнивая формулы (19_2), (19_3) и (24), мы видим, что p и q из формул (19_2) и (19_3) будут частными производными от z по x и y при переменных a и b, если a и b удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При выполнении условий (25) функция $\varphi(x, y, a, b)$ с переменными a и b будет решением уравнения (18).

Рассмотрим вопрос о том, как удовлетворить уравнениям (25).

1) Уравнения (25) удовлетворяются, если функции a и b удовлетворяют двум конечным (не дифференциальным) уравнениям:

$$\varphi'_a(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi'_b(x, y, a, b) = 0. \tag{26}$$

Допуская, что эти уравнения разрешимы относительно a и b, мы подставим полученные в результате этого разрешения функции от x и y в выражение (19), которое окажется решением уравнения, не содержащим ни произвольных постоянных, ни произвольных функций.

Это решение называется *особым интегралом.*

2) Если функции φ'_a и φ'_b не обращаются в нуль при подстановке на место a и b соответствующих функций от x и y, то, рассматривая уравнения (25) как систему двух алгебраических линейных уравнений с двумя неизвестными, мы приходим к выводу, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Если все элементы этого определителя равны нулю, то $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$, и мы возвращаемся к полному интегралу.

3) Если не все элементы определителя (27) равны нулю, то его тождественное обращение в нуль показывает, что между a и b

существует функциональная зависимость, не содержащая x и y; если, например, $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ или $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, то эта зависимость может быть записана в виде:

$$b = \omega(a), \tag{28}$$

причём ω — произвольная функция. Подставляя значение (28) в уравнения (25), мы придём к одному уравнению $\left[\text{так как } \frac{\partial b}{\partial x} = \omega'(a)\frac{\partial a}{\partial x},\ \frac{\partial b}{\partial y} = \omega'(a)\frac{\partial a}{\partial y}\right]$:

$$\varphi'_a(x,\ y,\ a,\ \omega(a)) + \varphi'_b(x,\ y,\ a,\ \omega(a))\,\omega'(a) = 0. \tag{29}$$

Если из этого уравнения можно определить a как функцию от x и y, то затем из уравнения (28) мы находим b как функцию независимых переменных; подставляя эти значения a и b в выражение (19_1), мы, согласно предыдущему, получим решение. Совокупность таких решений при любом выборе дифференцируемой функции $\omega(a)$ называется *общим интегралом* уравнения (1) или уравнения (18). Каждому выбору произвольной функции $\omega(a)$ соответствует, вообще говоря, некоторое частное решение, входящее в общий интеграл. В этом смысле мы можем сказать, что общий интеграл зависит от произвольной функции.

Мы провели все рассуждения для полного интеграла, представленного в разрешённой форме (19_1). Соответствующие вычисления можно провести и для полного интеграла, данного в неразрешённой относительно z форме (19); только в соответствующих местах придётся вводить производные от неявной функции и иногда вводить дополнительные требования о разрешимости тех или иных уравнений.

В самом деле, уравнение (1) является следствием уравнений (23) как при постоянных, так и при переменных a и b. Если a и b являются функциями от x, y, то соответствующие производные от z по x и y, т. е. p, q, вычисляются из соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}q + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24_1}$$

Сравнивая формулы (24_1) и (23), мы получаем условия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25_1}$$

Из этих условий, совместно с уравнением $V=0$, нам надо определить функции a и b. Мы снова получаем три случая:

1) если положить $\frac{\partial V}{\partial a}=0$, $\frac{\partial V}{\partial b}=0$, то, исключая из этих уравнений и из уравнения (19) a и b, мы придём *к особому интегралу*, вовсе не содержащему произвольных постоянных;

2) полагая $\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}=0$, мы возвращаемся к *полному интегралу*;

3) в общем случае мы имеем: $\frac{D(a, b)}{D(x, y)}=0$, откуда заключаем о существовании соотношения между a и b,

$$b=\omega(a), \tag{28}$$

где ω означает произвольную функцию. В силу уравнения (28), система (25_1) приводится к одному соотношению:

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a)=0. \tag{29_1}$$

Исключая a и b из уравнений (19), (28) и (29_1), мы приходим к соотношению между x, y, z, входящему в общий интеграл; фактический вид этого решения зависит от выбора произвольной функции $\omega(a)$. Итак, общий интеграл определяется соотношениями (19), (28) и (29_1) при произвольной (дифференцируемой) функции ω.

3. Мы нашли три вида решения уравнения в частных производных. Сейчас мы покажем, что этими тремя видами исчерпываются все решения уравнения (1) или (18): иначе говоря, *всякое решение уравнения в частных производных входит или в полный, или в общий, или в особый интеграл.*

В самом деле, пусть

$$z=\Phi(x, y) \tag{30}$$

будет какое-нибудь решение уравнения (18), т. е. имеет место тождество:

$$\Phi'_x(x, y)=f(x, y, \Phi(x, y), \Phi'_y(x, y)). \tag{C}$$

Пусть, с другой стороны,

$$z=\varphi(x, y, a, b) \tag{19_1}$$

есть полный интеграл того же уравнения. В силу предыдущей теории, чтобы (если это возможно) получить решение (30) из полного интеграла, надо подобрать две функции a и b от x и y так, чтобы имели место тождества:

$$\Phi(x, y)=\varphi(x, y, a, b), \tag{31}$$

$$\Phi'_x(x, y)=\varphi'_x(x, y, a, b), \tag{31_1}$$

$$\Phi'_y(x, y)=\varphi'_y(x, y, a, b). \tag{31_2}$$

Мы уже видели (п. 1), что уравнения (31) и (32_2) разрешимы относительно a и b:

$$a=\psi_1(x,\ y,\ \Phi,\ \Phi'_y),$$
$$b=\psi_2(x,\ y,\ \Phi\ \Phi'_y);$$

ψ_1 и ψ_2 имеют то же значение, что в формулах (20). Внося найденные значения a и b в правую часть уравнения (31_1), мы получим:

$$\varphi'_x(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ \Phi,\ \Phi'_y),\ \psi_2(x,\ y,\ \Phi,\ \Phi'_y)),$$

а это, в силу тождества (D) (п. 1), совпадает с выражением

$$f(x,\ y,\ \Phi,\ \Phi'_y);$$

это же последнее выражение, в силу тождества (C), даёт $\Phi'_x(x,\ y)$. Таким образом, значения a и b, найденные из системы (31) и (31_2), удовлетворяют также уравнению (31_1). Итак, если Φ есть решение, то определение a и b из уравнений (31), (31_1), (31_2) всегда возможно.

Дифференцируя обе части уравнения (31), в которое вместо a и b подставлены найденные функции, соответственно по x и y, мы получаем:

$$\Phi'_x(x,\ y)=\varphi'_x+\varphi'_a\frac{\partial a}{\partial x}+\varphi'_b\frac{\partial b}{\partial x},$$

$$\Phi'_y(x,\ y)=\varphi'_y+\varphi'_a\frac{\partial a}{\partial y}+\varphi'_b\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Сравнивая полученные тождества с равенствами (31_1) и (31_2), приходим к заключению, что a и b удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi'_a\frac{\partial a}{\partial x}+\varphi'_b\frac{\partial b}{\partial x}=0,\qquad \varphi'_a\frac{\partial a}{\partial y}+\varphi'_b\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

Но в п. 2 мы исследовали эту систему и пришли к выводу, что она приводит лишь к полному, общему или особому интегралу. Таким образом, наше утверждение доказано.

Примечание. Легко убедиться в том, что одному дифференциальному уравнению соответствует бесчисленное множество полных интегралов.

В самом деле, пусть мы имеем один из них: $z=\varphi(x,\ y,\ a,\ b)$. При нахождении из него общего интеграла выберем функцию ω, совершенно определённую, но зависящую от двух постоянных a', b', $b=\omega(a;\ a',\ b')$; полученное по правилу нахождения общего интеграла исключением a и b решение будет зависеть от двух новых параметров a' и b', т. е. будет представлять полный интеграл данного уравнения, отличный, вообще, от исходного.

4. Полученные результаты относительно интегралов дифференциального уравнения в частных производных допускают простую геометрическую интерпретацию. Решение уравнения в частных

производных определяет в координатном пространстве (x, y, z) поверхность, которую мы будем называть *интегральной поверхностью*. Полный интеграл

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{19}$$

представляет семейство интегральных поверхностей от двух параметров.

Назовём *элементом прикосновения*, или просто элементом, совокупность пяти величин (x, y, z, p, q), где x, y, z суть координаты некоторой точки, а p и q — угловые коэффициенты проходящей через неё плоскости. Тогда задача нахождения решения уравнения (1) может быть поставлена так: найти такую поверхность, чтобы совокупность элементов, образованных точками этой поверхности и угловыми коэффициентами касательных плоскостей, удовлетворяла соотношению:

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Полный интеграл представляет семейство интегральных поверхностей, зависящее от двух параметров. Мы видели, что не все интегральные поверхности получаются из полного интеграла при частных значениях параметров. Посмотрим, что́ представляют геометрически общий и особый интегралы. Для получения решения, входящего в общий интеграл, мы брали произвольно соотношение:

$$b = \omega(a), \tag{28}$$

подставляли это значение b в уравнение (19) и исключали параметр a из соотношений:

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a) = 0. \tag{19'}$$

Геометрически это значит следующее: мы, при помощи соотношения (28), из данного семейства (19) от двух параметров выделяем некоторое семейство от одного параметра и затем находим огибающую поверхность этого семейства. Так как огибающая поверхность в каждой своей точке касается одной из огибаемых поверхностей, т. е. имеет с нею общий элемент соприкосновения, то является очевидным тот факт, что эта огибающая также есть решение данного уравнения.

Наконец, особый интеграл получается исключением a и b из трёх уравнений:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Но этот процесс, как известно, приводит к огибающей семейства поверхностей от двух параметров, если она существует. Рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что все элементы этой огибающей поверхности удовлетворяют данному уравнению, т. е. она является интегральной поверхностью.

Пример 7. Семейство шаровых поверхностей данного радиуса R с центрами в точках плоскости xOy

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$$

есть семейство от двух параметров a и b. Чтобы найти уравнение в частных производных, для которого это семейство является полным интегралом, дифференцируем уравнение по x и по y в предположении, что z есть функция x и y; из трёх полученных уравнений исключаем a и b. Имеем:

$$x-a+zp=0, \quad y-b+zq=0;$$

отсюда $x-a=-zp$, $y-b=-zq$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем:

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2$$

— соответствующее уравнение в частных производных.

Чтобы получить решение, входящее в общий интеграл, вводим соотношение $b=\omega(a)$, т. е. выделяем семейство шаров, центры которых лежат на линии $y=\omega(x)$, $z=0$. Всякая огибающая поверхность такого семейства (*поверхность каналов*) является интегральной поверхностью и входит в общий интеграл. Наконец, особый интеграл получится исключением a и b из трёх уравнений:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2, \quad x-a=0, \quad y-b=0,$$

откуда $z=\pm R$. Получим уравнения двух плоскостей, которые касаются каждой шаровой поверхности в одной точке.

Возьмём, в частности, в качестве линий центров шаров семейство всех прямых плоскости, зависящее от двух параметров α, β:

$$b=a\alpha+\beta.$$

Нам следует исключить параметр a из двух соотношений:

$$(x-a)^2+(y-a\alpha-\beta)^2+z^2=R^2, \quad x-a+(y-a\alpha-\beta)\alpha=0;$$

получаем семейство (от двух параметров) круглых цилиндров радиуса R, оси которых лежат в плоскости xOy, которое, в свою очередь, может служить полным интегралом:

$$\frac{(y-\alpha x-\beta)^2}{1+\alpha^2}+z^2=R^2.$$

Пример 8. Полный интеграл: $z=ax+by+ab$. Находим соответствующее уравнение: $p=a$, $q=b$; $z=px+qy+pq$. Находим особый интеграл: $0=x+b$, $0=y+a$; $z=-xy$. Особый интеграл есть гиперболоид, а полный состоит из семейства от двух параметров его касательных плоскостей. Для нахождения общего интеграла мы

должны установить соотношение $b=\omega(a)$ и исключить a из уравнений:

$$z=ax+\omega(a)y+a\omega(a), \quad 0=x+\omega(a)+\omega'(a)(y+a).$$

Получаем уравнение развёртывающейся поверхности (как огибающей семейства плоскостей от одного параметра), касающейся гиперболоида вдоль кривой, проекция которой на плоскость $z=0$ есть $x=-\omega(-y)$.

5. Характеристики. В дифференциальной геометрии при нахождении огибающей семейства поверхностей от одного параметра характеристики определяются как линии, вдоль которых огибаемая поверхность соприкасается с огибающей. Рассмотрим эти характеристики, или, точнее, *характеристические линии*, как они определяются при нахождении общего интеграла при известном полном интеграле.

Пусть дан полный интеграл:

$$V(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0. \tag{19}$$

Мы видели, что общий интеграл определяется как огибающая семейства поверхностей от одного параметра,

$$V(x,\ y,\ z,\ a,\ \omega(a))=0,$$

где $\omega(a)$ есть произвольная функция. Уравнения характеристических линий для этого семейства имеют вид:

$$V(x,\ y,\ z,\ a,\ \omega(a))=0, \quad V'_a+V'_b\omega'(a)=0, \tag{19$'$}$$

т. е. по виду — это те же уравнения, которые определяют общий интеграл, но рассматриваемые при постоянном значении параметра. Если придавать параметру a различные значения, то уравнения (19′) определяют семейство характеристических линий от одного параметра, которые и образуют общий интеграл. Из определения огибающей поверхности следует, что вдоль характеристики огибающая и огибаемая имеют общие элементы прикосновения, т. е. не только точки, но и касательные плоскости. Чтобы получить угловые коэффициенты этой касательной плоскости, достаточно продифференцировать первое уравнение (19′) по x и по y (мы вправе рассматривать a как постоянное, т. е. определить угловые коэффициенты касательной плоскости к огибаемой поверхности):

$$V'_x(x,\ y,\ z,\ a,\ \omega(a))+V'_zp=0, \quad V'_y+V'_zq=0. \tag{19$''$}$$

Уравнения (19′) и (19″) определяют при постоянном a характеристическую линию и в каждой точке её угловые коэффициенты p и q некоторой плоскости; так как эта плоскость есть касательная к интегральной поверхности и характеристика лежит на этой поверхности, то плоскость

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

есть одна из касательных плоскостей к характеристической линии (19′) в точке (x, y, z).

Таким образом, уравнения (19′) и (19″) определяют при постоянном a геометрический образ, составленный из кривой (19′), каждой точке которой отнесена одна из касательных плоскостей к этой кривой. Этот образ мы будем называть *характеристикой первого порядка* или *характеристической полосой*. Вся характеристика первого порядка принадлежит интегральной поверхности как полного, так и общего интеграла — точки кривой лежат на интегральных поверхностях, а касательные плоскости, определённые уравнениями (19″), являются касательными плоскостями к интегральным поверхностям.

Мы провели наше рассмотрение, выбрав определённую функцию $\omega(a)$ и придавая затем параметру a постоянное значение. Поставим теперь вопрос об определении всех характеристик, которые можно получить из полного интеграла (19). Заметим, что при постоянном значении a_0 параметра a значение произвольной функции $\omega(a)$ есть произвольное число b_0, а значение производной $\omega'(a)$ есть ещё одно произвольное число c_0[1]). Итак, все возможные характеристические линии определяются уравнениями:

$$V(x, y, z, a, b)=0, \quad V'_a(x, y, z, a, b)+V'_b(x, y, z, a, b)c=0, \quad (19''')$$

где a, b, c — три произвольные постоянные. Чтобы определить характеристики первого порядка, надо к уравнениям (19‴) присоединить ещё следующие:

$$V'_x(x, y, z, a, b)+V'_z p=0, \quad V'_y+V'_z q=0. \qquad (19^{IV})$$

Итак, характеристики (нелинейного) дифференциального уравнения в частных производных образуют семейство от трёх параметров.

§ 4. Метод Лагранжа-Шарпи нахождения полного интеграла.

1. В предыдущем параграфе мы видели, что задача интеграции уравнения в частных производных может считаться формально законченной, если нам удалось найти полный интеграл, так как все остальные решения получаются из него дифференцированием и исключением. Переходим к тем методам, которые дают возможность фактически разыскивать этот интеграл. При этом мы будем придерживаться формальной точки зрения, т. е. считать задачу разрешённой, если она сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных

---

[1]) В самом деле, достаточно взять функцию $\omega(a)$ вида:

$$\omega(a)=b_0+(a-a_0)c_0,$$

чтобы иметь

$$\omega(a_0)=b_0, \quad \omega'(a_0)=c_0.$$

уравнений, а тем более к квадратурам. Мы будем опираться на результаты § 1, а именно, там мы видели, как находить решение двух совместных уравнений с частными производными. Теперь нам дано одно такое уравнение. Идея метода Лагранжа-Шарпи состоит в том, что мы находим второе уравнение при условии, чтобы система из двух полученных уравнений была вполне интегрируема. Второе уравнение подбираем так, чтобы оно содержало одно произвольное постоянное. При интеграции системы двух уравнений введётся ещё одно произвольное постоянное. В результате мы получаем решение данного уравнения, зависящее от двух произвольных постоянных, т. е. полный интеграл.

Переходим к изложению метода. Дано дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \tag{1}$$

Постараемся найти второе уравнение:

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a, \tag{32}$$

содержащее произвольное постоянное a, так чтобы система уравнений (1) и (32) удовлетворяла условию полной интегрируемости. Для этого, прежде всего, необходимо, чтобы эта система была разрешима относительно совокупности переменных p и q, в частности, чтобы не обращался тождественно в нуль якобиан

$$\frac{D(E,\ \Phi)}{D(p,\ q)}.$$

Предположим эти условия выполненными. Тогда мы можем привести систему к виду:

$$p=A(x,\ y,\ z);\quad q=B(x,\ y,\ z), \tag{3}$$

и условие полной интегрируемости напишется так:

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A. \tag{4}$$

Перепишем это условие для системы (1), (32), определяющей p и q как функции от x, y, z, пользуясь формулами производных от неявных функций. Замечаем, что для подстановки в уравнение (4) нам достаточно вычислить следующие частные производные:

$$\frac{\partial A}{\partial y}\equiv\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z},\quad \frac{\partial q}{\partial x},\ \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Дифференцируем равенства (1), (32), рассматривая p и q как функции от x, y, z, по z; получаем:

$$F'_z+F'_p\frac{\partial p}{\partial z}+F'_q\frac{\partial q}{\partial z}=0,$$

$$\Phi'_z+\Phi'_p\frac{\partial p}{\partial z}+\Phi'_q\frac{\partial q}{\partial z}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_z & F'_q\\ \Phi'_z & \Phi'_q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_p & F'_z\\ \Phi'_p & \Phi'_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}}. \tag{33}$$

Аналогично, дифференцирование по x даёт:

$$F'_x+F'_p\frac{\partial p}{\partial x}+F'_q\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad \Phi'_x+\Phi'_p\frac{\partial p}{\partial x}+\Phi'_q\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_p & F'_x\\ \Phi'_p & \Phi'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}}. \tag{34}$$

Дифференцирование по y даёт:

$$F'_y+F'_p\frac{\partial p}{\partial y}+F'_q\frac{\partial q}{\partial y}=0,\quad \Phi'_y+\Phi'_p\frac{\partial p}{\partial y}+\Phi'_q\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_y & F'_q\\ \Phi'_y & \Phi'_q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}}. \tag{35}$$

Вставляем выражения (3) для A и B и выражения (33), (34), (35) для их производных в условие (4); освобождаясь от знаменателя, который, по условию, не равен нулю, получаем:

$$-\begin{vmatrix}F'_y & F'_q\\ \Phi'_y & \Phi'_q\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}F'_z & F'_q\\ \Phi'_z & \Phi'_q\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}F'_p & F'_x\\ \Phi'_p & \Phi'_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F'_p & F'_z\\ \Phi'_p & \Phi'_z\end{vmatrix}p=0,$$

или

$$\begin{vmatrix}F'_p & F'_x+F'_zp\\ \Phi'_p & \Phi'_x+\Phi'_zp\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F'_q & F'_y+F'_zq\\ \Phi'_q & \Phi'_y+\Phi'_zq\end{vmatrix}=0. \tag{36}$$

Для производных от известной функции F вводим обозначения:

$$F'_x=X,\quad F'_y=Y,\quad F'_z=Z,\quad F'_p=P,\quad F'_q=Q.$$

Раскрывая определители в последнем равенстве, мы получим для неизвестной функции Ф линейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(Pp+Qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-(X+Zp)\frac{\partial\Phi}{\partial p}-(Y+Zq)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0. \quad (37)$$

Это уравнение связано с системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]):

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=-\frac{dp}{X+Zp}=-\frac{dq}{Y+Zq}. \quad (38)$$

Нам достаточно найти одно частное решение уравнения (37), содержащее произвольное постоянное; следовательно, достаточно найти один первый интеграл системы (38):

$$\Phi(x, y, z, p, q)=a, \quad (32)$$

удовлетворяющий тому условию, что уравнение (32) вместе с уравнением (1) разрешимы относительно p, q. Производя это разрешение, мы найдём выражения p и q через x, y, z и постоянное a: $p=\varphi_1(x, y, z, a)$, $q=\varphi_2(x, y, z, a)$. Подставляя эти выражения в уравнение Пфаффа:

$$dz=p\,dx+q\,dy, \quad (39)$$

получаем, согласно предыдущим рассуждениям, вполне интегрируемое выражение:

$$dz=\varphi_1(x, y, z, a)\,dx+\varphi_2(x, y, z, a)\,dy.$$

В его общее решение войдёт постоянное b, и мы получим, таким образом, полный интеграл уравнения (1):

$$V(x, y, z, a, b)=0.$$

Примечание 1. Одним из первых интегралов системы (38) является соотношение $F(x, y, z, p, q)=C$, что явствует из вида уравнения (36); конечно, интеграл Ф должен быть отличен от F. Но наличие известного интеграла, точнее, соотношения $F=0$, позволяет понизить порядок системы (37) на единицу, т. е. до третьего порядка.

Примечание 2. Если данное уравнение не содержит явно искомой функции, т. е. имеет вид:

$$F(x, y, p, q)=0, \quad (1_1)$$

---

[1]) Если предположить существование вторых непрерывных производных функции F, то система (38) удовлетворяет условиям теоремы Коши; начальные условия надо выбрать так, чтобы хотя бы один из знаменателей не был равен нулю.

то второе уравнение тоже можно искать в форме:

$$\Phi(x, y, p, q) = a. \tag{32_1}$$

Тогда уравнения (36) и (37) примут вид:

$$\begin{vmatrix} F'_p & F'_x \\ \Phi'_p & \Phi'_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F'_q & F'_y \\ \Phi'_q & \Phi'_y \end{vmatrix} = 0, \tag{36_1}$$

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial y} - X\frac{\partial\Phi}{\partial p} - Y\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0, \tag{37_1}$$

а вместо системы (38) будем иметь:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{dp}{X} = -\frac{dq}{Y} \tag{38_1}$$

(систему третьего порядка с одним известным соотношением).

Из уравнений (1_1) и (32_1) мы определим:

$$p = \varphi_1(x, y, a), \quad q = \varphi_2(x, y, a),$$

и уравнение Пфаффа

$$dz = \varphi_1(x, y, a)\,dx + \varphi_2(x, y, a)\,dy$$

интегрируется в квадратурах.

Примечание 3. Выражение в левой части формулы (36_1) называется *скобкой Пуассона* и обозначается так:

$$(F, \Phi) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Выражение в левой части (36) называется *скобкой Майера*; если ввести условные обозначения:

$$\frac{dF}{dx} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p, \quad \frac{dF}{dy} \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q$$

и аналогично для Φ, то скобка Майера будет:

$$[F, \Phi] \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{d\Phi}{dx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{d\Phi}{dy} \end{vmatrix}.$$

Говорят, что две функции, обращающие в нуль скобку Пуассона или Майера, ***находятся в инволюции***. Итак, первый шаг метода Лагранжа состоит в том, что мы подыскиваем второе уравнение, находящееся в инволюции с первым.

Примечание 4. В методе Лагранжа-Шарпи мы использовали только один первый интеграл системы (38). Докажем теперь, что *если известны два первых интеграла системы* (38), *находящиеся в инволюции, то* (при одном добавочном условии) *полный интеграл уравнения* (1) *получается без всяких интеграций.* Пусть нам известны два первых интеграла системы (38):

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a, \quad \Psi(x, y, z, p, q) = b. \tag{32$_2$}$$

Согласно известной зависимости между системой (38) и линейным уравнением в частных производных (37), мы имеем тогда также $[F, \Phi] = 0$, $[F, \Psi] = 0$. Кроме того, по условию теоремы $[\Phi, \Psi] = 0$. Введём дополнительное условие:

$$\Delta = \frac{D(F, \Phi, \Psi)}{D(z, p, q)} \neq 0.$$

Тогда уравнения (1) и (32_2) можно разрешить относительно z, p, q. Пусть результат разрешения будет:

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad p = \psi(x, y, a, b), \quad q = \chi(x, y, a, b). \tag{A}$$

Чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что p и q, определённые формулами (A), являются частными производными от φ по x и по y. Подставляем выражение (A) в формулы (1) и (32_2) и дифференцируем полученные тождества по x и по y:

$$\begin{aligned}
&F'_x + F'_z\varphi'_x + F'_p\psi'_x + F'_q\chi'_x = 0, && F'_y + F'_z\varphi'_y + F'_p\psi'_y + F'_q\chi'_y = 0,\\
&\Phi'_x + \Phi'_z\varphi'_x + \Phi'_p\psi'_x + \Phi'_q\chi'_x = 0, && \Phi'_y + \Phi'_z\varphi'_y + \Phi'_p\psi'_y + \Phi'_q\chi'_y = 0,\\
&\Psi'_x + \Psi'_z\varphi'_x + \Psi'_p\psi'_x + \Psi'_q\chi'_x = 0, && \Psi'_y + \Psi'_z\varphi'_y + \Psi'_p\psi'_y + \Psi'_q\chi'_y = 0.
\end{aligned}$$

Чтобы составить скобки Майера, умножаем первое уравнение первого столбца на $-\Phi'_p$, второе на F'_p, первое уравнение второго столбца на $-\Phi'_q$, второе на F'_q и сложим полученные выражения; прибавляя и вычитая выражения $(F'_p\Phi'_z - \Phi'_pF'_z)p$ и $(F'_q\Phi'_z - \Phi'_qF'_z)q$, получаем:

$$[F, \Phi] + (F'_p\Phi'_z - \Phi'_pF'_z)(\varphi'_x - p) + (F'_q\Phi'_z - \Phi'_qF'_z)(\varphi'_y - q) + \\ + (F'_p\Phi'_q - \Phi'_pF'_q)(\chi'_x - \psi'_y) = 0,$$

или, в силу равенства нулю скобки Майера,

$$\begin{vmatrix} F'_p & F'_z \\ \Phi'_p & \Phi'_z \end{vmatrix} (\varphi'_x - p) + \begin{vmatrix} F'_q & F'_z \\ \Phi'_q & \Phi'_z \end{vmatrix} (\varphi'_y - q) + \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix} (\chi'_x - \psi'_y) = 0.$$

Аналогично, комбинируя тождества второй и третьей строки, а также третьей и первой, находим:

$$\begin{vmatrix} \Phi'_p & \Phi'_z \\ \Psi'_p & \Psi'_z \end{vmatrix} (\varphi'_x - p) + \begin{vmatrix} \Phi'_q & \Phi'_z \\ \Psi'_q & \Psi'_z \end{vmatrix} (\varphi'_y - q) + \begin{vmatrix} \Phi'_p & \Phi'_q \\ \Psi'_p & \Psi'_q \end{vmatrix} (\chi'_x - \psi'_y) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Psi'_p & \Psi'_z \\ F'_p & F'_z \end{vmatrix} (\varphi'_x - p) + \begin{vmatrix} \Psi'_q & \Psi'_z \\ F'_q & F'_z \end{vmatrix} (\varphi'_y - q) + \begin{vmatrix} \Psi'_p & \Psi'_q \\ F'_p & F'_q \end{vmatrix} (\chi'_x - \psi'_y) = 0.$$

Получилась система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Определитель этой системы имеет своими элементами миноры якобиана Δ; следовательно, он равен $\Delta^2 \neq 0$. Отсюда неизвестные тождественно равны нулю, т. е.

$$p = \varphi'_x, \quad q = \varphi'_y, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \chi'_x = \psi'_y = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Теорема доказана.

2. В некоторых частных случаях интеграция уравнения (1) упрощается; именно, для нахождения второго уравнения нет нужды писать всю систему (38) или (38_1). Рассмотрим эти случаи.

1) Уравнение вида $F(p, q) = 0$. Здесь уравнение $p = a$ находится в инволюции с данным; определив из уравнения $F(a, q) = 0$ значение $q = f(a)$ и подставив эти выражения p и q в уравнение Пфаффа (39), получаем после интеграции полный интеграл:

$$z = ax + f(a)y + b.$$

Очевидно, к тому же результату мы могли бы притти, если бы написали систему (38_1) и, обратив внимание на то, что $X = 0$, получили одно уравнение вида $dp = 0$, откуда первый интеграл $p = a$.

Пример 9. $p^2 + q^2 = 1$. Взяв дополнительное уравнение в виде $p = \cos\alpha$ (α — произвольное постоянное), найдём из данного уравнения $p = \sin\alpha$. Полный интеграл:

$$z = x\cos\alpha + y\sin\alpha + b.$$

2) Уравнение $F(z, p, q) = 0$. Два последних члена равенства (38) дают: $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$; соответствующий первый интеграл: $\frac{q}{p} = a$.

Внося значение $q = ap$ в уравнение, имеем $F(z, p, ap) = 0$; разрешаем относительно p: $p = \varphi(z, a)$, соответственно $q = a\varphi(z, a)$.

Подстановка в уравнение Пфаффа даёт после разделения переменных

$$\int \frac{dz}{\varphi(z, a)} = x + ay + b.$$

Пример 10. $p^2 = z^2(1 - pq)$. Полагая $q = ap$, находим:

$$p = \frac{z}{\sqrt{1 + az^2}}, \quad q = \frac{az}{\sqrt{1 + az^2}}; \quad \frac{\sqrt{1 + az^2}}{z}\,dz = dx + a\,dy,$$

откуда

$$x + ay + b = \int \frac{\sqrt{1 + az^2}}{z}\,dz.$$

Последний интеграл подстановкой $\sqrt{1 + az^2} = u$ приводится к виду:

$$\int \frac{u^2 du}{u^2 - 1} = u + \frac{1}{2}\ln\frac{u - 1}{u + 1}.$$

Искомый полный интеграл:

$$\sqrt{1+az^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+az^2}-1}{\sqrt{1+az^2}+1}-x-ay-b=0.$$

3) Случай разделяющихся переменных. Уравнение вида

$$\varphi(x,\ p)=\psi(y,\ q)$$

интегрируется следующим образом: вводим вспомогательное уравнение $\varphi(x,\ p)=a$; тогда, заменяя данное уравнение уравнением $\psi(y,\ q)=a$, мы получаем два уравнения в инволюции; из одного получим: $p=f(x,\ a)$, из другого: $q=g(y,\ a)$. Интеграция уравнения Пфаффа приводится к квадратурам и даёт полный интеграл:

$$z=\int f(x,\ a)\,dx+\int g(y,\ a)\,dy+b.$$

Если решить это уравнение общим методом, то первый и третий члены уравнений (38_1) дадут:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}=-\frac{dp}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\ \text{ или }\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp=0,$$

откуда и получается дополнительное уравнение $\varphi(x,\ p)=a$.

Пример 11. $pq=xy$. Разделяем переменные:

$$\frac{p}{x}=\frac{y}{q};\quad \frac{p}{x}=a;\quad \frac{y}{q}=a;\quad p=ax,\quad q=\frac{y}{a};$$

$$dz=ax\,dx+\frac{y\,dy}{a};\quad z=\frac{ax^2}{2}+\frac{y^2}{2a}+b.$$

Если бы мы написали систему (38_1): $\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{dp}{y}=\frac{dq}{x}$, то дополнительное уравнение получилось бы из уравнения $\frac{dx}{q}=\frac{dp}{y}$, если в нём, согласно заданному уравнению, отношение $\frac{q}{y}$ заменить через $\frac{x}{p}$: $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p}$. Если же взять второй и третий члены равенств (38_1), то вспомогательное уравнение будет: $p^2-y^2=a$, откуда $p=\sqrt{y^2+a}$; тогда из данного уравнения находим: $q=\frac{xy}{\sqrt{y^2+a}}$, и уравнение Пфаффа, $dz-\sqrt{y^2+a}\,dx-\frac{xy\,dy}{\sqrt{y^2+a}}=0$, даёт: $z=x\sqrt{y^2+a}+b$ — новую форму полного интеграла.

К рассмотренному типу относится уравнение $p=f(x,\ q)$, если его решить относительно q. Но можно непосредственно взять

в качестве дополнительного уравнения $q=a$. Тогда $p=f(x, a)$, и мы получаем новый интеграл:

$$z=\int f(x, a)\,dx+ay+b.$$

4) Обобщённое уравнение Клеро имеет вид:

$$z=px+qy+f(p, q).$$

Легко проверить, что его полным интегралом является [1])

$$z=ax+by+f(a, b).$$

Пример такого уравнения рассмотрен в § 3 (пример 8).

В заключение рассмотрим пример, где необходимо приложить общий метод Лагранжа-Шарпи для разыскания полного интеграла.

Пример 12. $p^2+q^2+pq-qx-py-2z+xy=0$. Система (38) имеет вид:

$$\frac{dx}{2p+q-y}=\frac{dy}{2q+p-x}=\frac{dz}{2p^2+2q^2+2pq-py-qx}=$$
$$=\frac{dp}{q-y+2p}=\frac{dq}{p-x+2q}.$$

Непосредственно получаем интегрируемую комбинацию: $dp=dx$, $p=x+a$. Вставляя это значение p в данное уравнение, получаем:

$$q^2+aq-2z-ay+(x+a)^2=0.$$

Определяем из этого уравнения q:

$$q=-\frac{a}{2}+\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Подставляя значения p и q в уравнение Пфаффа, получаем после простых преобразований:

$$dy-\frac{dz+\frac{a}{2}dy-(x+a)\,dx}{\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}}}=0,$$

---

[1]) В системе (38) имеем два члена $\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$, дающих два первых интеграла $p=a$, $q=b$. Согласно примечанию 4 п. 1 настоящего параграфа, полный интеграл получается без всяких интеграций.

откуда (вводя для простоты окончательного результата постоянную интеграции в виде $b+\frac{a}{2}$)

$$y+b+\frac{a}{2}=\sqrt{2z+ay-(x+a)^2+\frac{a^2}{4}},$$

или

$$2z=(x+a)^2+(y+b)^2+ab.$$

Примечание. Часто для упрощения вычислений полезно предварительно произвести в уравнении замену переменных; покажем это на примере.

Пример 13. $p^2+q^2-(x^2+y^2)z=0$. Переписываем уравнение в виде:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-x^2-y^2=0.$$

Вводим новое переменное $\zeta=\sqrt{z}$; тогда переменные разделяются: $4\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-x^2=-4\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+y^2$. Приравнивая обе части произвольной постоянной a, находим:

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\sqrt{x^2+a}, \quad 2\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\sqrt{y^2-a},$$

откуда

$$2\sqrt{z}=\int\sqrt{x^2+a}\,dx+\int\sqrt{y^2-a}\,dy,$$

или

$$2\sqrt{z}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}y\sqrt{y^2-a}-\frac{a}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2-a}\right)+b.$$

3. Решение задачи Коши по известному полному интегралу. Мы видим, что знание полного интеграла даёт возможность получить все решения заданного уравнения в частных производных методом вариации постоянных a и b. Поставим теперь задачу Коши: найти определённое решение по заданным начальным условиям. Для уравнения в частных производных первого порядка начальная задача Коши ставится так: найти функцию $z(x, y)$, которая при $x=x_0$ обращается в заданную функцию $f(y)$. На геометрическом языке это значит: найти интегральную поверхность, проходящую через данную кривую, лежащую в плоскости $x=x_0$.

Мы поставим начальную задачу более общую:

Найти интегральную поверхность уравнения (1), *проходящую через заданную* (пространственную) *кривую*:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t). \tag{40}$$

Пусть нам дан интеграл уравнения (1):

$$z = \Phi(x, y, a, b). \tag{A}$$

Возьмём уравнения, определяющие общий интеграл:

$$z = \Phi(x, y, a, \omega(a)), \tag{40_1}$$

$$\Phi'_a(x, y, a, \omega(a)) + \Phi'(x, y, a, \omega(a))\,\omega'(a) = 0. \tag{40_2}$$

Нам надо определить функцию $\omega(a)$ таким образом, чтобы поверхность, определяемая уравнениями (40_1) и (40_2), проходила через кривую (40). Если мы вставим выражения (40) на место x, y, z в уравнение (40_1), то получим одно условие, которому должна удовлетворять функция $\omega(a)$:

$$-\chi(t) + \Phi(\varphi(t), \psi(t), a, \omega(a)) = 0; \tag{41}$$

запишем это уравнение сокращённо:

$$U(t, a, \omega(a)) = 0. \tag{41_1}$$

Равенство (40_2) даёт, по подстановке начальных данных (40), уравнение, левая часть которого получается дифференцированием левой части равенства (41_1) по a, если рассматривать t как постоянное:

$$U'_a(t, a, \omega(a)) + U'_\omega(t, a, \omega(a))\,\omega'(a) = 0. \tag{41_2}$$

Соотношение (41_1) при известной функции $\omega(a)$ определяет a через переменное t, т. е. выделяет в каждой точке кривой (40) поверхность семейства (A), проходящую через эту точку, так что огибающая их совокупности есть искомая интегральная поверхность. Дифференцируя в этом предположении равенство (41_1) по t, получаем:

$$U'_t + [U'_a + U'_\omega\omega'(a)]\frac{da}{dt} = 0,$$

или, в силу равенства (41_2),

$$U'_t(t, a, \omega(a)) = 0. \tag{42}$$

Равенства (41_1) и (42) дают нам, вообще говоря, возможность выразить a и $\omega(a)$ в функции t, или же, если из них исключить t, дают соотношение $b = \omega(a)$ между b и a, т. е. в обоих случаях выделяют семейство от одного параметра из семейства (A). Исключение этого параметра из уравнений (40_1) и (40_2) даёт искомое решение. В самом деле, сравнение уравнений (40_1) и (40_2) с равенствами (41_1) и (41_2) показывает, что характеристики семейства (40_1) получаемые при данном значении t, проходят через соответствующую точку кривой (40). Уравнение (42), являющееся следствием уравнений (41_1) и (41_2), в раскрытом виде пишется так:

$$-\chi'(t) + \Phi'_x\varphi'(t) + \Phi'_y\psi'(t) = 0;$$

оно выражает тот факт, что касательная к кривой (40) с угловыми коэффициентами $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ лежит в касательной плоскости к полученной интегральной поверхности (угловые коэффициенты которой суть Φ'_x, $\Phi'_y - 1$) — факт, очевидный геометрически, так как построенная интегральная поверхность проходит через кривую (40).

Примечание. Если исключить параметр t из уравнений (41_1) и (41_2), то мы придём к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\Pi(a, \omega(a), \omega'(a)) = 0, \tag{43}$$

которому удовлетворяет функция $\omega(a)$. Заметим, что его общим решением является выражение (41_1) при постоянном t, так как уравнение (43) получается из (41_1) дифференцированием по a и исключением t. Но, очевидно, это общее решение не определяет нужной нам функции $\omega(a)$, так как в наших рассуждениях t рассматривается как переменный параметр. Искомая функция получилась присоединением уравнения (42) и исключением t. Но дифференцирование общего решения по параметру и последующее исключение параметра приводят к особому решению. Итак, искомая функция $\omega(a)$ является особым решением уравнения (43).

Пример 14. Для уравнения $z = px + qy + pq$ найти решение, проходящее через кривую:

$$x = 0, \quad z = y^2.$$

Полный интеграл уравнения есть $z = ax + by + ab$. Пишем начальную кривую в параметрической форме: $x = 0$, $y = t$, $z = t^2$.

Вставляя это начальное значение в полный интеграл, получаем:

$$t^2 = bt + ab.$$

Дифференцируем по t: $2t = b$; подставляем это значение в уравнение и получаем: $a = -\frac{t}{2}$. Вместо a вводим t как параметр семейства ∞^1 интегралов; получаем:

$$z = -\frac{t}{2}x + 2ty - t^2.$$

Остаётся найти огибающую этого семейства поверхностей. Дифференцируем по t: $-\frac{x}{2} + 2y - 2t = 0$, откуда $t = y - \frac{x}{4}$ и, наконец,

$$z = -\frac{xy}{2} + \frac{x^2}{8} + 2y^2 - \frac{xy}{2} - y^2 + \frac{xy}{2} - \frac{x^2}{16}, \text{ или } z = \left(\frac{x}{4} - y\right)^2$$

— искомое решение.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать следующие уравнения:

211. $px + qy - pq = 0$. Задача Коши при $x = 0$, $z = y$.

212. $p^2 + zpq = z^2$.

213. $p^2x^2 + q^2y^2 = z$.

214. $\frac{p}{y} - \frac{q}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

215. $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=z^2$.

216. $z-px-qy-3p^2+q^2=0$. Решить задачу Коши: $z=y^2$ при $x=0$; найти особый интеграл.

217. $(z-px-qy)^2=1+p^2+q^2$. Найти особый интеграл.

218. $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$.

219. $p^2+q+x+z=0$.

§ 5. Метод Коши для двух независимых переменных.

Метод Коши интегрирования уравнений в частных производных первого порядка состоит в том, что сначала отыскиваются характеристики (точнее — характеристические полосы). Так как характеристическая полоса представляет многообразие одного измерения (вдоль характеристической линии x, y, z выражаются функциями одного параметра: отнесённые к каждой точке линии величины p и q тем самым являются функциями того же параметра), то естественно ожидать, что нахождение характеристических полос сведётся к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. После того как характеристики найдены, возникает вторая задача — составить из этих характеристик интегральную поверхность.

1. Определение характеристических линий на интегральной поверхности. Дано дифференциальное уравнение:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{1}$$

где функция F допускает в рассматриваемой области непрерывные частные производные второго порядка.

В п. 5 § 3 настоящей главы мы определили характеристические линии на поверхности, входящей в полный интеграл уравнения (1), при помощи уравнений (19‴), которые в случае, если полный интеграл дан в форме (19₁), разрешённой относительно z, имеют вид

$$z=\varphi(x,\ y,\ a,\ b),\quad \varphi'_a(x,\ y,\ a,\ b)+\varphi'_b(x,\ y,\ a,\ b)\,c=0\text{[1]}. \tag{44}$$

Замечаем, что второе из уравнений (44) не содержит z и представляет уравнение проекций характеристических линий на плоскость xOy. Найдём дифференциальное уравнение этих проекций. Дифференцирование второго из уравнений (44) даёт для перемещения вдоль проекции характеристической линии на плоскость xOy соотношение:

$$(\varphi''_{ax}+\varphi''_{bx}c)\,dx+(\varphi''_{ay}+\varphi''_{by}c)\,dy=0. \tag{45}$$

Оба выражения в скобках не равны тождественно нулю, ибо иначе, в силу произвола c, φ'_x и φ'_y не зависели бы от a и b, и функция z

---

[1]) Мы предполагаем, что φ допускает непрерывные первые производные, а также непрерывные вторые смешанные производные по переменным x, y, с одной стороны, и параметрам a, b — с другой.

удовлетворяла бы двум уравнениям в частных производных:

$$p=\varphi'_x(x,\ y),\quad q=\varphi'_y(x,\ y),$$

следовательно, зависела бы только от одного существенного параметра. Подставляя значение z из (44) в уравнение (1) и дифференцируя полученное тождество по a и b, получим [1]):

$$Z\varphi'_a+P\varphi''_{ax}+Q\varphi''_{ay}=0,\quad Z\varphi'_b+P\varphi''_{bx}+Q\varphi''_{by}=0.$$

Умножаем второе из этих равенств на c и складываем с первым; в силу второго из соотношений (44) члены, содержащие Z, уничтожатся, и останется

$$P(\varphi''_{ax}+\varphi''_{bx}c)+Q(\varphi''_{ay}+\varphi''_{by}c)=0. \tag{46}$$

Рассматривая (45) и (46) как два линейных уравнения, допускающих отличные от нуля решения, приходим к равенству нулю их определителя: $\begin{vmatrix} dx & dy \\ P & Q \end{vmatrix}=0$, откуда

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$$

— искомое дифференциальное уравнение.

Пусть теперь дана любая интегральная поверхность для уравнения (1):

$$z=\varphi(x,\ y), \tag{47}$$

причём φ допускает непрерывные частные производные первого и второго порядков. На поверхности (47) мы назовём *характеристиками* (или характеристическими линиями) *линии, проекции которых на плоскость xOy удовлетворяют дифференциальному уравнению*:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}, \tag{48}$$

где на место входящих в P и Q переменных z, p, q подставлены соответственно $\varphi(x,\ y)$, φ'_x, φ'_y. Уравнение (48) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка между x и y; если P и Q одновременно не обращаются в нуль, оно, в силу предположения относительно F, определяет единственное решение, соответствующее начальным данным x_0, y_0. Таким образом, *через каждую точку* $(x_0,\ y_0,\ z_0=\varphi(x_0,\ y_0))$ *поверхности* (47) *проходит единственная характеристическая линия, лежащая на этой поверхности.*

2. Дифференциальные уравнения характеристик первого порядка. Наше определение характеристик не подвинуло ещё вперёд решения задачи об интегрировании уравнения

---

[1]) Сохраняем введённые в § 4 обозначения.

в частных производных первого порядка, так как мы умеем пока определять характеристические линии только на данной интегральной поверхности, а перед нами стоит задача — найти интегральные поверхности. Решающий факт, благодаря которому в методе Коши оказывается возможным сведение задачи об интегрировании уравнения в частных производных первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается *в переходе к характеристикам первого порядка*. Определим *характеристику первого порядка как характеристическую линию, лежащую на интегральной поверхности, каждой точке которой отнесён соответствующий элемент прикосновения этой поверхности*; т. е. угловые коэффициенты p и q касательной плоскости к поверхности. Для удобства введём вдоль характеристической линии параметр u, приравнивая дифференциалу от u отношения (48):

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=du,$$

или

$$\frac{dx}{du}=P, \quad \frac{dy}{du}=Q. \tag{48_1}$$

К уравнениям (48_1) мы можем непосредственно присоединить ещё одно уравнение; в самом деле, при перемещении по поверхности переменные x, y, z, p, q связаны соотношением $dz=p\,dx+q\,dy$ (так как p и q являются угловыми коэффициентами касательной плоскости), или

$$\frac{dz}{du}=p\,\frac{dx}{du}+q\,\frac{dy}{du},$$

откуда, сопоставляя с уравнениями (48_1), получим уравнение:

$$\frac{dz}{du}=Pp+Qq. \tag{48_2}$$

Вдоль характеристики первого порядка мы имеем пять неизвестных функций x, y, z, p, q от u и всего только три уравнения (48_1), (48_2). Постараемся дополнить эту систему ещё двумя уравнениями. Для всякого перемещения по интегральной поверхности мы имеем:

$$dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy\ ^{1)};$$

в частности, для перемещения вдоль характеристической линии имеем:

$$\frac{dp}{du}=r\,\frac{dx}{du}+s\,\frac{dy}{du}, \quad \frac{dq}{du}=s\,\frac{dx}{du}+t\,\frac{dy}{du},$$

---

[1]) Через r, s, t обозначены соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

или, заменяя $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ их значениями из (48_1),

$$\frac{dp}{du} = Pr + Qs, \quad \frac{dq}{du} = Ps + Qt. \tag{49}$$

В добавленные уравнения (49) входят три новые неизвестные функции — значения вторых производных от z вдоль характеристической линии (совокупность значений x, y, z, p, q, r, s, t вдоль этой линии есть характеристика второго порядка). Но мы можем выразить правые части уравнений (49) только через величины x, y, z, p, q. Для этого обращаемся к уравнению (1), которое по подстановке в него решения (47) обращается в тождество. Дифференцируя это тождество по x и по y, получаем:

$$X + Zp + Pr + Qs = 0, \quad Y + Zq + Ps + Qt = 0. \tag{50}$$

Определяя из равенств (50) значения $Pr + Qs$, $Ps + Qt$ и подставляя их в уравнения (49), получаем два добавочных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dp}{du} = -X - Zp, \quad \frac{dq}{du} = -Y - Zq.$$

Присоединяя эти уравнения к системе (48_1), (48_2), получим **пять уравнений с пятью неизвестными функциями**:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq} = du. \tag{51}$$

Заметим, что с точностью до введённого нами вспомогательного переменного u (несущественного) система (51) совпадает с системой (38), которая была получена в методе Лагранжа-Шарпи.

Если уравнение дано в виде, разрешённом относительно p:

$$p = f(x, y, z, q), \tag{18}$$

то система (51) напишется в виде:

$$dx = \frac{dy}{-f'_q} = \frac{dz}{f - qf'_q} = \frac{dp}{f'_x + ff'_z} = \frac{dq}{f'_y + qf'_z}. \tag{51_1}$$

В системе (51_1) нет нужды вводить вспомогательное переменное u; естественно взять x в качестве независимого переменного; кроме того, в эту систему явно не входит p, так что достаточно проинтегрировать систему из первого, второго и четвёртого уравнений и затем определить p при помощи равенства (18).

Итак, *всякая характеристика первого порядка удовлетворяет системе* (51). *Эту систему*, в которой число уравнений равно числу искомых функций, *можно интегрировать без предварительного знания интегральной поверхности* (47).

3. Определение характеристик из дифференциальных уравнений. Мы показали, что всякая характеристика первого порядка уравнения в частных производных (1) или (18) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (51) или (51_1). Пусть общее решение системы (51) при начальных значениях $u=0$, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 будет:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi_1(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ y&=\varphi_2(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ z&=\varphi_3(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ p&=\psi_1(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ q&=\psi_2(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0). \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Однако не все эти решения являются характеристиками. Чтобы выделить из функций (52) те, которые соответствуют характеристикам, заметим, прежде всего, что система (51) допускает первый интеграл:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=C. \tag{53}$$

В самом деле, дифференцируя левую часть этого равенства по u и принимая во внимание уравнения (51), получаем:

$$\frac{dF}{du}=X\frac{dx}{du}+Y\frac{dy}{du}+Z\frac{dz}{du}+P\frac{dp}{du}+Q\frac{dq}{du}=$$
$$=XP+YQ+Z(Pp+Qq)-P(X+Zp)-Q(Y+Zq)=0\ ^{1)}.$$

Следовательно, функция F имеет вдоль каждого решения системы (51) постоянное значение — то самое, которое она имеет для начального элемента; итак, вдоль решения (52) системы (51) мы имеем:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0). \tag{53_1}$$

Заметим теперь, что характеристики первого порядка состоят из элементов интегральных поверхностей данного уравнения, так что эти элементы удовлетворяют уравнению (1), т. е. функции (52), определяющие характеристики, должны быть связаны соотношением $F=0$. Равенство (53_1) показывает, что последнее соотношение будет выполняться вдоль всей характеристики, если начальные значения связать соотношением:

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=0. \tag{54}$$

Итак, *мы назовём характеристиками первого порядка решения* (52) *системы* (51), *в которых начальные значения связаны соотношением* (54).

---

[1]) См. также § 4, 1, примечание 1.

В случае уравнения в частных производных вида (18) и соответствующей системы обыкновенных уравнений (51_1), с независимым переменным x, решения этой системы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= g_1(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0); \\ z &= g_2(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0); \\ p &= h_1(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0)+p_0; \\ q &= h_2(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0); \\ p &= f\,(x,\ g_1,\ g_2,\ h_2). \end{aligned}\right\} \qquad (52_1)$$

Соотношению (54) в этом случае соответствует равенство:

$$p_0 = f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0), \qquad (54_1)$$

которое определяет начальное значение p_0.

Подсчитаем, от скольких параметров зависит семейство характеристик. Если характеристики заданы уравнениями (52_1) и условием (54_1), то начальное значение независимого переменного x_0 следует рассматривать как заданное число, и остаются три независимых параметра y_0, z_0, q_0, в полном согласии с числом параметров, от которого зависят характеристики, получаемые из полного интеграла. В случае системы (52) и соотношения (54) замечаем, что переменное u не является существенным; если, например, $P \neq 0$ при начальных условиях, то за независимое переменное можно опять выбрать x; тогда, рассматривая x_0 как данное число, мы получим опять три независимых параметра y_0, z_0, q_0; p_0 выражается через них с помощью соотношения (54).

Из условий единственности решения системы (51) или (51_1) с заданными начальными данными (эта единственность следует из существования у функции F или f непрерывных вторых производных) следует, что *характеристика однозначно определяется начальным элементом*. В частности, пусть две интегральные поверхности соприкасаются в некоторой точке (x_0, y_0, z_0); тогда они имеют в этой точке общее значение частных производных, p_0 и q_0. Начальный элемент (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) определяет единственную характеристику первого порядка, принадлежащую, очевидно, обеим интегральным поверхностям. Следовательно, если *две интегральные поверхности соприкасаются в одной точке* (причём соответствующий элемент не является особой точкой для системы (51)), *то они соприкасаются вдоль всей характеристической линии, проходящей через эту точку*[1]).

4. Построение интегральной поверхности из характеристик. Так как всякая дважды дифференцируемая инте-

---

[1]) Отсюда, в частности, следует, что элементы, принадлежащие особому интегралу, являются особыми для системы дифференциальных уравнений (51).

гральная поверхность, по доказанному, распадается на ∞^1 характеристик, то естественно поставить задачу: зная характеристики, построить из них интегральные поверхности. Для этого необходимо, прежде всего, выделить семейство характеристик от одного параметра, т. е. взять начальные значения $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ как (дифференцируемые) функции одного параметра v. Эти функции, конечно, должны быть связаны соотношением (54). Затем надо потребовать, чтобы характеристики первого порядка были «прилажены», т. е. чтобы определённые вдоль характеристики плоскости с угловыми коэффициентами p, q стали касательными плоскостями поверхности, образованной характеристическими линиями. Это равносильно требованию, чтобы, если представить интегральную поверхность в форме:

$$z = \varphi(x, y), \tag{47}$$

имели место равенства:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Так как у нас независимыми переменными теперь являются u и v, то последние условия целесообразно написать в дифференциальной форме (справедливой при любом выборе независимых переменных):

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{55}$$

Дифференциальное равенство (55) равносильно двум уравнениям:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{55_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{55_2}$$

Равенство (55_1), выражающее условие, что плоскость с угловыми коэффициентами p, q касается характеристической линии, выполняется в силу уравнений (48_1), (48_2) (обыкновенные производные этих уравнений нужно заменить частными, так как мы ввели через начальные условия второе переменное v). Равенство (55_2) представляет **новое условие**; *его геометрический смысл — тот, что линии на интегральной поверхности, соответствующие изменению* v, т. е. переходу с одной характеристической линии на другую (при постоянном u), *также должны касаться плоскости*

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Посмотрим, как можно удовлетворить этому условию.

Переносим все члены уравнения (55_2) в левую часть и обозначаем полученную функцию через V:

$$V = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{56}$$

Дифференцируя равенство (56) по u:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial v\, \partial u} - p\, \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} - q\, \frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

и вычитая из полученного равенства результат дифференцирования тождества (55_1) по v [1]):

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial v\, \partial u} - p\, \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} - q\, \frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial u} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

или, в силу дифференциальных уравнений (51),

$$\frac{\partial V}{\partial u} = P\,\frac{\partial p}{\partial v} + Q\,\frac{\partial q}{\partial v} + X\,\frac{\partial x}{\partial v} + Y\,\frac{\partial y}{\partial v} + Z\left(p\frac{\partial x}{\partial v} + q\,\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

С другой стороны, дифференцируя по v тождество $F = 0$, в которое подставлены $x, \ldots, q$ как функции u и v, получаем:

$$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\,\frac{\partial y}{\partial v} + Z\,\frac{\partial z}{\partial v} + P\,\frac{\partial p}{\partial v} + Q\,\frac{\partial q}{\partial v} = 0.$$

Вычитая почленно два последних равенства, имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -Z\left(\frac{\partial z}{\partial v} - p\,\frac{\partial x}{\partial v} - q\,\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

или, в силу определения (57) функции V,

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -ZV. \tag{57}$$

Итак, функция V удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению (57). Интеграция этого уравнения даёт:

$$V = V_0 e^{\int\limits_{u_0}^{u} Z du},$$

где V_0 есть значение V при $u = u_0$. Из последнего равенства видно, что для обращения V в нуль необходимо и достаточно, чтобы было $V_0 = 0$, т. е. чтобы x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, рассматриваемые как функции v, удовлетворяли соотношению:

$$\frac{dz_0}{dv} - p_0\frac{dx_0}{dv} - q_0\frac{dy_0}{dv} = 0. \tag{58}$$

---

[1]) Согласно теоремам, доказанным в главе VII, § 3, производные от решений системы (51) по начальным данным, а следовательно, и по параметру v, существуют и являются непрерывными дифференцируемыми функциями независимого переменного u. Отсюда следует существование входящих в последующее рассуждение производных и законность перестановки порядка дифференцирования.

Таким образом, *чтобы построить из характеристик интегральную поверхность, необходимо, чтобы начальные условия, взятые как функции параметра v, удовлетворяли условиям* (54) [или (54_1)] и (58). Геометрический смысл последнего условия таков: характеристики первого порядка будут «прилажены» на всём своём протяжении, если «приладить» их начальные элементы.

5. Задача Коши. Чтобы найти какое-нибудь решение уравнения (1), нужно найти пять функций x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 параметра v, удовлетворяющих двум соотношениям (54) [или (54_1)] и (58). Задача, очевидно, неопределённая: можно, вообще говоря, произвольно задать три функции. Чтобы из бесконечного множества решений выделить одно определённое, поставим задачу Коши в простейшей форме.

Пусть уравнение задано в форме:

$$p = f(x, y, z, q), \tag{18}$$

где f — непрерывная и дважды дифференцируемая функция в окрестности значений $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$, $\overline{q}_0$, причём соответствующее значение p пусть будет $\overline{p}_0$, *Требуется найти решение, удовлетворяющее начальному условию*:

$$z_0 = \varphi(y_0) \text{ при } x = \overline{x}_0, \tag{59}$$

где $\varphi(y)$ имеет две непрерывные производные, причём пусть $\varphi(\overline{y}_0) = \overline{z}_0$ и $\varphi'(\overline{y}_0) = \overline{q}_0$. Уравнения характеристик (52_1) определены для некоторого интервала $|x - \overline{x}_0| \leqslant h$ и являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметров x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 в некоторой окрестности точки $(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0)$. За параметр v возьмём значение y_0; имеем:

$$y_0 = v, \quad z_0 = \varphi(v).$$

Тогда уравнение (58), ввиду того что $x_0 = \overline{x}_0$ есть постоянное, даёт:

$$q_0 = \varphi'(v);$$

наконец, условие (54_1) дает:

$$p_0 = f(\overline{x}_0, v, \varphi(v), \varphi'(v)) \equiv \psi(v).$$

Подставляя величины $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$, $\overline{q}_0$ в уравнения (52_1), мы получим из двух первых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= g_1(x;\ \overline{x}_0,\ v,\ \varphi(v),\ \varphi'(v)), \\ z &= g_2(x;\ \overline{x}_0,\ v,\ \varphi(v),\ \varphi'(v)), \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

причём правые части определены для достаточно малых значений $|x - \overline{x}_0|$, $|v - \overline{y}_0|$. Чтобы получить из уравнений (60) z как явную

функцию от x, y, достаточно разрешить первое из этих уравнений относительно v и затем подставить полученное выражение во второе уравнение (60). Для выяснения возможности такого разрешения вычислим производную от y по v:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial g_1}{\partial y_0}+\frac{\partial g_1}{\partial z_0}\varphi'(v)+\frac{\partial g_1}{\partial q_0}\varphi''(v).$$

Но при $x=x_0$ мы имеем (глава VIII, § 3): $\frac{\partial y}{\partial y_0}=1$, $\frac{\partial y}{\partial z_0}=\frac{\partial y}{\partial q_0}=0$; следовательно, при $x=\bar{x}_0$ производная $\frac{\partial y}{\partial v}=1$, а значит, она отлична от нуля при достаточно малой $|x-\bar{x}_0|$, т. е. разрешение первого уравнения (60) относительно v возможно, причём v оказывается непрерывно дифференцируемой функцией от x, y; подставляя найденное значение v во второе уравнение (60), мы получим решение уравнения (18), удовлетворяющее начальному условию (59), в виде:

$$z=\Phi(x, y),$$

где Φ допускает непрерывные частные производные первого порядка. Докажем, что Φ *допускает* также *непрерывные производные второго порядка*. Если в двух последних уравнениях (52_1) выразить начальные значения через параметр v и затем заменить v его выражением через x и y, то полученные функции p и q будут частными производными от z соответственно по x и по y, как это следует из равенства (55); мы знаем, что функции h_1 и h_2 допускают непрерывные производные по x и по начальным данным, а следовательно, и по параметру v; отсюда, в силу дифференцируемости v по x и по y, следует существование непрерывных частных производных от p и q по x и по y, т. е. вторых частных производных от z.

Единственность (среди дважды дифференцируемых функций) найденного решения следует из того, что всякая интегральная поверхность в окрестности неособой точки уравнений (51_1) образована характеристиками, и эти характеристики должны иметь общий элемент с начальной кривой (59). Но это кривая однозначно определяет в каждой своей точке, т. е. для каждого значения y_0, начальный элемент $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$; следовательно (в силу теоремы Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений), характеристики, проходящие через точки начальной кривой (59,) определяются однозначно; поэтому и сама интегральная поверхность однозначно определяется начальными данными (59).

Общая задача Коши — найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через пространственную кривую

$$x=\alpha(y),\quad z=\beta(y). \tag{59_1}$$

— может быть сведена к рассмотренной частной задаче Коши заменой переменных. Вводим новые независимые переменные X, Y, полагая

$$x = X + \alpha(y), \quad y = Y;$$

тогда получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{\partial z}{\partial x}\alpha'(y) + \frac{dz}{dy},$$

откуда

$$p = \frac{\partial z}{\partial X}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial Y} - \frac{\partial z}{\partial X}\alpha'(Y);$$

после этой замены уравнение (1) принимает вид:

$$F\left(X + \alpha(Y),\ Y,\ z, \frac{\partial z}{\partial X},\ \frac{\partial z}{\partial Y} - \alpha'(Y)\frac{\partial z}{\partial X}\right) = 0, \tag{1'}$$

а начальные условия будут:

$$X = 0, \quad z = \beta(Y).$$

Надо ещё исследовать вопрос, можно ли разрешить (1′) относительно производной $\frac{\partial z}{\partial X}$. Одно из условий для возможности непрерывного и однозначного разрешения вдоль кривой (59_1): производная от левой части уравнения (1′) по $\frac{\partial z}{\partial X}$ должна быть не равна нулю.

Имеем:

$$F'_{\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)} = F'_p - F'_q\alpha'(Y).$$

Замечая, что $\alpha'(Y) = \frac{dx}{dy}$ вдоль кривой (59_1), приходим к заключению, что приведение преобразованного уравнения к виду (18), вообще говоря, невозможно, если вдоль кривой (59_1) выполняется соотношение:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}. \tag{48}$$

В частности, если через кривую (59_1) проходит интегральная поверхность, то последнее соотношение показывает, что кривая (59) есть характеристика. А в таком случае однозначное решение задачи Коши и фактически невозможно, так как через характеристики проходит бесконечное множество интегральных поверхностей, и задача Коши становится неопределённой.

Наконец, можно поставить задачу Коши в таком виде: найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через заданную кривую, данную в параметрической форме:

$$x_0 = \xi(v), \quad y_0 = \eta(v), \quad z_0 = \zeta(v). \tag{59_2}$$

Для определения p_0 из q_0 в функции параметра v имеем два уравнения [полученных из (54) и (58)]:

$$F(\xi(v),\ \eta(v),\ \zeta(v),\ p_0,\ q_0)=0,$$
$$\zeta'(v) \neq p_0\xi'(v)-q_0\eta'(v)=0.$$

Первое достаточное условие для того, чтобы из этих уравнений можно было определить p_0 и q_0, есть то, что якобиан этих уравнений по p_0, q_0 не обращается в нуль вдоль кривой (59_2), т. е.

$$\xi'(v)\,Q_0-\eta'(v)\,P_0\neq 0, \qquad (61)$$

где P_0 и Q_0 означают производные от левой части уравнения (54) соответственно по p_0 и q_0.

Если выполнено также второе условие существования неявных функций (уравнения удовлетворяются для некоторых начальных условий), то при выполнении условия (61) мы определяем $p_0=\pi(v)$, $q_0=\varkappa(v)$. Найденные начальные значения достаточно подставить в систему трёх уравнений (52), и мы получим уравнения искомой интегральной поверхности в параметрической форме:

$$x=\Phi_1(u,\ v),\quad y=\Phi_2(u,\ v),\quad z=\Phi_3(u,\ v)\,^{1)}.$$

Если выражение (61) равно нулю во всех точках кривой (59_2) и эта кривая лежит на интегральной поверхности, то, очевидно, она является характеристикой.

Покажем, что задача Коши, действительно, допускает бесконечное число решений, если за начальную кривую взята характеристическая кривая. Пусть уравнения начальной кривой суть $x_0=x_0(u)$, $y_0=y_0(u)$, $z_0=z_0(u)$, причём, если определить $p_0(u)$ и $q_0(u)$ из уравнений (54_1) и (58), то получится характеристика первого порядка. Пусть значению $u=0$ соответствует элемент $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$. Выбираем произвольно три (дважды дифференцируемые) функции $\tilde{x}(v)$, $\tilde{y}(v)$, $\tilde{z}(v)$, подчинив их лишь следующим условиям:

1) $\tilde{x}(0)=\bar{x}_0$, $\tilde{y}(0)=\bar{y}_0$, $\tilde{z}(0)=\bar{z}_0$;

2) $\tilde{x}'(0)\,y_0'(0)-\tilde{y}'(0)\,x_0'(0)\neq 0$;

3) $\tilde{z}'(0)=\bar{p}_0\tilde{x}'(0)+\bar{q}_0\tilde{y}'(0)$.

Решаем задачу Коши для начальной кривой $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. Эта задача возможна и решается однозначно в окрестности точки $(\bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0)$. В самом деле, определив из уравнений (54_1) и (58) вдоль начальной кривой $\tilde{p}(v)$ и $\tilde{q}(v)$, мы, в силу условий 1) и 3), получим при $v=0$ начальный элемент исходной характеристики $(\bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0,\ \bar{p}_0,\ \bar{q}_0)$; но, в силу условия 2), эта характеристика

---

[1]) При начальных заданиях в форме (59_1) и (59_2) мы не исследовали до конца вопроса о возможности разрешения уравнения (1') относительно $\dfrac{\partial z}{\partial X}$ и уравнений (54) и (58) относительно p_0 и q_0. Эта возможность требует дополнительных ограничений на начальную кривую; см. ниже, п. 6, примечание.

не касается начальной кривой, что достаточно для решения задачи Коши. При любом выборе функций $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, удовлетворяющих условиям 1) — 3), интегральная поверхность содержит заданную характеристику, так как содержит её начальный элемент. Таким образом, мы построили бесчисленное множество поверхностей, содержащих данную характеристическую кривую.

Это свойство можно взять за определение характеристики: *характеристика есть такая кривая, для которой задача Коши становится неопределённой.*

Пример 15. Применим метод Коши к интеграции уравнения:

$$px + qy - pq = 0.$$

Дифференциальные уравнения характеристик будут:

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{dz}{-pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} = du$$

(мы упростили выражение $Pp + Qq$, пользуясь данным уравнением). Интеграция этих уравнений с начальными данными x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $u = 0$ даёт сначала для двух последних уравнений:

$$p = p_0 e^{-u}, \quad q = q_0 e^{-u}.$$

Подставляя эти значения в три оставшихся уравнения, находим:

$$\frac{dx}{du} = x - q_0 e^{-u}, \quad \frac{dy}{du} = y - p_0 e^{-u}, \quad \frac{dz}{du} = -p_0 q_0 e^{-2u},$$

откуда

$$x = \left(x_0 - \frac{q_0}{2}\right) e^u + \frac{q_0}{2} e^{-u}, \quad y = \left(y_0 - \frac{p_0}{2}\right) e^u + \frac{p_0}{2} e^{-u},$$

$$z = z_0 - \frac{p_0 q_0}{2} + \frac{p_0 q_0}{2} e^{-2u},$$

причём начальные значения связаны соотношением:

$$p_0 x_0 + q_0 y_0 - p_0 q_0 = 0.$$

Для построения интегральной поверхности следует ещё связать начальные значения, рассматриваемые как функции v, соотношением:

$$z_0'(v) - p_0(v) x_0'(v) - q_0(v) y_0'(v) = 0.$$

Решим, в частности, такую задачу Коши: найти интегральную поверхность, проходящую через прямую $x = 0$, $z = y$. Здесь мы имеем: $x_0 = 0$, $y_0 = v$, $z_0 = v$. Уравнения для определения p_0 и q_0 суть: $q_0 v - p_0 q_0 = 0$, $1 - q_0(v) = 0$, откуда $q_0 = 1$, $p_0 = v$. Три последних из найденных уравнений характеристик дадут поверхность в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}), \; y = \frac{v}{2}(e^u + e^{-u}), \; z = \frac{v}{2}(1 + e^{-2u}) = \frac{v}{2} \frac{e^u + e^{-u}}{e^u}.$$

Для получения решения в явной форме исключаем параметры u и v:

$$z = ye^{-u}, \quad e^{2u} + 2xe^{u} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{u} = -x + \sqrt{x^2+1}, \quad e^{-u} = x + \sqrt{x^2+1},$$

и окончательно

$$z = xy + y\sqrt{x^2+1}.$$

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать по методу Коши уравнения:

220. $z = pq$; начальные условия: $x_0 = u$, $y_0 = u^2$, $z_0 = u^3$.

221. $p^2 + q^2 = 1$; $x_0 = \cos u$, $y_0 = \sin u$, $z_0 = \frac{1}{2}u$.

222. $z = px + qy + pq$; $x_0 = 1$, $z_0 = y_0^3$.

§ 6. Метод Коши для n независимых переменных.

1. Характеристики; построение решения из характеристик. Изложенный в предыдущем параграфе метод непосредственно распространяется на уравнение в частных производных первого порядка с n независимыми переменными. Мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями: независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$; искомая функция z; частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x_i} \equiv p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \equiv p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

В этих обозначениях уравнение в частных производных первого порядка имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{62}$$

Данную функцию F мы будем предполагать имеющей непрерывные вторые частные производные; дальнейшие ограничения выяснятся в ходе доказательств.

Применяя обычный язык многомерной геометрии, мы скажем, что решение уравнения (62):

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{63}$$

представляет интегральную поверхность уравнения (62) в пространстве $n+1$ измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$. Мы будем предполагать, что функция φ допускает непрерывные частные производные второго порядка.

Введём ещё обозначения:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристики (характеристические линии) на интегральной поверхности (63) мы определим как линии, проекции которых на гиперплоскость $z=0$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}, \tag{64}$$

или (приравнивая отношения (64) дифференциалу вспомогательной независимой переменной u):

$$\frac{dx_1}{du}=P_1, \quad \frac{dx_2}{du}=P_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{du}=P_n. \tag{64_1}$$

Если в правые части этих уравнений на место z, p_i подставить функции φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то система (64_1), в силу сделанных предположений о дифференцируемости, имеет решения, однозначно определяемые начальными условиями: $u=0$, $x_1=x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_n=x_n^0$. Этот факт можно выразить такой теоремой: *через каждую точку* $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, z_0=\varphi(x_1, \ldots, x_n)]$ *интегральной поверхности проходит единственная характеристическая линия, лежащая на этой поверхности* (при этом сделано предположение, что в этой точке не имеют места равенства $P_1=P_2=\ldots=P_n=0$).

Введём понятие интегрального элемента. *Интегральным элементом* (первого порядка) или элементом прикосновения решения (63) уравнения (62) назовём совокупность $2n+1$ чисел (координат интегрального элемента):

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad z=\varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad p_i=\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Совокупность интегральных элементов вдоль характеристической линии называется *характеристикой первого порядка*.

Подобно тому как в § 5, дополним систему (64_1) дифференциальными уравнениями для всех координат линейных элементов характеристик.

Для всякого перемещения по интегральной поверхности, следовательно, и для перемещения вдоль характеристической линии, имеет место соотношение:

$$dz=\sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

откуда вдоль характеристики

$$\frac{dz}{du}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dx_i}{du}=\sum_{i=1}^{n} P_i p_i. \tag{64_2}$$

Далее, при перемещении по интегральной поверхности, имеем:

$$dp_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, dx_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда вдоль характеристики

$$\frac{dp_i}{du} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \frac{dx_j}{du} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} P_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{64$_3$}$$

Для исключения вторых производных замечаем, что уравнение (62) обращается в тождество при подстановке вместо z его значения (63), а вместо p_i — соответствующих частных производных. Дифференцируя это тождество $F = 0$ по x_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, получаем:

$$X_i + Zp_i + \sum_{j=1}^{n} P_j p_{ji} = 0,$$

откуда $\sum_{j=1}^{n} P_j p_{ji} = -X_i - Zp_i$, и уравнения (64$_3$) обращаются в

$$\frac{dp_i}{du} = -X_i - Zp_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{64$_4$}$$

Собирая вместе уравнения (64$_1$), (64$_2$), (64$_4$), получаем систему $2n+1$ уравнений с $2n+1$ функциями x_i, z, p_i:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\sum_{i=1}^{n} P_i p_i} =$$
$$= -\frac{dp_1}{X_1 + Zp_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = du. \tag{65}$$

Эти уравнения можно интегрировать, не зная решения (63). Решение системы (65) (единственное), определённое начальными значениями u_0, x_1^0, ..., x_n^0, z_0, p_1^0, ..., p_n^0, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(u;\ x_1^0, \ldots, x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots, p_n^0) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ z &= \varphi(u;\ x_1^0, \ldots, x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots, p_n^0),\\ p_i &= \psi_i(u;\ x_1^0, \ldots, x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots, p_n^0) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Замечаем, что $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = C$ является первым интегралом системы (65). В самом деле, в силу уравнений (65), имеем:

$$\frac{dF}{du} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{dx_i}{du} + Z\frac{dz}{du} + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dp_i}{du} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_i P_i + Z\sum_{i=1}^{n} P_i p_i - \sum_{i=1}^{n} P_i (X_i + Zp_i) = 0.$$

Свяжем начальные значения соотношением:

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = 0. \tag{67}$$

Тогда, в силу определения первого интеграла, будем иметь тождество:

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n) = 0,$$

то-есть при выполнении условия (67) все элементы, даваемые решением системы (65), удовлетворяют данному уравнению (62). Так как координаты определённых на интегральной поверхности характеристик первого порядка должны удовлетворять данному уравнению, то, наложив на начальные значения условие (67), мы среди соответствующих решений (66) системы (65) найдём все характеристики всех интегральных поверхностей уравнения (62). Пока ещё не видно, что все такие решения окажутся характеристиками на некоторой интегральной поверхности. Принимая это положение (оно будет доказано ниже), мы назовём *характеристиками первого порядка уравнения* (62) решения (66) системы (65), в которых начальные условия связаны соотношением (67).

Из теоремы единственности получается как следствие теорема: *если две интегральные поверхности имеют общий элемент первого порядка* (т. е. соприкасаются в одной точке), *то они соприкасаются вдоль целой характеристической линии, проходящей через эту точку*: в самом деле, обе интегральные поверхности имеют общую характеристику, определённую общим начальным элементом.

Поставим теперь задачу — построить решение уравнения в частных производных из характеристик. Так как характеристики являются многообразиями одного измерения, а интегральная поверхность есть многообразие n измерений, то для её построения необходимо ввести (через начальные значения) ещё $n-1$ параметров $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, т. е. положить:

$$\left.\begin{aligned} &x_i^0 = x_i^0(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad z_0 = z_0(v_1, \ldots, v_{n-1}), \\ &p_i^0 = p_i^0(v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

причём, конечно, условие (67) должно выполняться для этих функций. Тогда уравнения

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(u;\ v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ z &= \varphi(u;\ v_1, \ldots, v_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

определяют многообразие n измерений. Чтобы оно было интегральным [при условии, что исключение параметров u, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ даёт соотношение вида (63)], необходимо выполнение условия

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i = 0,$$

которое равносильно n условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Первое уравнение (70) выполняется в силу уравнения (64_2), остальные требуют для своего выполнения особого выбора функций (68). Чтобы найти условия, которым должны удовлетворять эти функции, обозначим:

$$\frac{\partial z}{\partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} = V_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{71}$$

и выясним, возможно ли подобрать функции (62) так, чтобы иметь $V_j \equiv 0$.

Дифференцируем уравнение (71) по u, а первое равенство (70) по v_j:

$$\frac{\partial V_j}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v_j},$$

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial v_j} \frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

Вычитая почленно, находим, используя уравнения (65):

$$\frac{\partial V_j}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial v_j} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_j} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} + Z \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j}.$$

Дифференцируя по v_j тождество $F=0$, в левой части которого подставлены x_i, z, p_i как функции u, v_i, ..., v_{n-1}, находим:

$$0=\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j}+Z\frac{\partial z}{\partial v_j}+\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_j}.$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, получим, принимая во внимание (71):

$$\frac{\partial V_j}{\partial u}=-ZV_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Интегрируя полученное обыкновенное дифференциальное уравнение для V_j, находим:

$$V_j=V_j^0 e^{-\int\limits_0^u Z\,du}.$$

Итак, для выполнения тождества $V_j\equiv 0$ необходимо и достаточно иметь $V_j^0=0$, или, в раскрытом виде,

$$\frac{\partial z_0}{\partial v_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial v_j}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{72}$$

или

$$dz_0-\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,dx_i^0=0. \tag{72'}$$

Итак, чтобы уравнения (69) давали интегральную поверхность, необходимо и достаточно, чтобы функции x_i^0, z_0, p_i^0 от v_1, ..., v_{n-1} удовлетворяли уравнениям (67) и (72). Нахождение этих функций уже не требует дальнейших интеграций.

Рассмотрим, например, *общую задачу Коши*: найти интегральную поверхность, проходящую через данное многообразие $n-1$ измерений. Это начальное многообразие мы зададим в параметрической форме:

$$x_i^0=\omega_i(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1})\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);\ z=\omega(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}). \tag{73}$$

Тогда для нахождения n функций p_i^0 мы будем иметь n уравнений (67) и (72); одно из условий их разрешимости есть неравенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial v_1} & \frac{\partial x_2^0}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial x_n^0}{\partial v_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial x_2^0}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n^0}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix},$$

т. е. характеристическая линия не может лежать в касательной $(n-1)$-мерной плоскости начального многообразия. Если в функции ω_i, ω (73) ввести n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, мы получаем решение уравнения (62), зависящее от n параметров, которое при некоторых добавочных условиях в случае n независимых переменных также называется полным интегралом.

2. Первый метод Якоби. Первый метод Якоби принципиально тождествен с методом Коши; в нём лишь специализирована форма уравнения, в целях приложения к задачам механики.

Искомую функцию обозначаем V, независимые переменные (числом $n+1$) $t, x_1, \ldots, x_n$, частные производные $\frac{\partial V}{\partial x_i} \equiv p_i$ (иногда будем писать также $\frac{\partial V}{\partial t} \equiv P$).

Уравнение предполагается не содержащим искомой функции и разрешённым относительно производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ и пишется в форме:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{74}$$

где H — заданная функция своих аргументов.

Пишем уравнения характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dV}{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + P} =$$
$$= -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = -\frac{dP}{\frac{\partial H}{\partial t}}. \tag{75}$$

Замечаем, что: 1) здесь нет нужды вводить вспомогательное независимое переменное; его роль играет t; 2) можно независимо проинтегрировать систему из $2n$ уравнений (75), не содержащих dV и dP,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{76}$$

Уравнения вида (76) часто встречаются в механике и носят название *канонической системы*, а функция H называется *функцией Гамильтона*.

Пользуясь методом Коши, легко проинтегрировать уравнение (74), если известно общее решение канонической системы (76). Пусть это последнее будет (начальные значения t_0, x_i^0, p_i^0):

$$x_i = \varphi_i(t;\ t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0),$$
$$p_i = \psi_i(t;\ t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{77}$$

Чтобы найти значение V вдоль характеристик, заменим в соответствующем дифференциальном уравнении P на $-H$ (в силу данного уравнения), получим:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial pi}-H;$$

в правой части этого уравнения подставим на место x_i, p_i их найденные выражения (77); получим функцию от t, и V найдётся квадратурой:

$$V=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)dt+V_0\equiv$$

$$\equiv \tilde{V}(t,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_n^0)+V_0. \tag{78}$$

Для нахождения полного интеграла уравнения (74) достаточно выразить x_i^0, p_i^0, V_0 через n параметров (аналогичных v_j в п. 1 настоящего параграфа) так, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$dV_0-\sum_{i=1}^{n} p_i^0\, dx_i^0=0 \tag{79}$$

(член с dt_0 отсутствует, так как t принято за независимое переменное), и в начальные данные задачи Коши надо ещё ввести $n+1$ параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}$.

Вместе с Гурса мы примем за параметры v_j начальные значения $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$, а задачу Коши поставим так: при $t=t_0$ должно быть:

$$V_0=a_1x_1^0+\ldots+a_nx_n^0+a_{n+1}. \tag{80}$$

Из уравнений (79) и (80) следует:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i^0}=a_i=p_i^0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Разрешаем n первых уравнений (77) относительно $x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0$ (это возможно при t, достаточно близком к t_0, так как якобиан от x_i по x_j^0 при $t=t_0$ равен 1). Заменив в них p_i^0 через a_i, получим:

$$x_i^0=\chi_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t,\ t_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{81}$$

Тогда выражение

$$V=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)t+\sum_{i=1}^n a_i x_i^0+a_{n+1}\equiv$$

$$\equiv\tilde{V}+\sum_{i=1}^n a_i x_i^0+a_{n+1},\qquad (78)$$

в котором p_i^0 заменены через a_i, а x_i^0 — через их выражения (81), есть решение уравнения (74), зависящее от $n+1$ произвольных постоянных, то есть полный интеграл.

3. Интегрирование канонической системы. В аналитической механике требуется найти решение канонической системы:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad (76)$$

а уравнение Якоби является вспомогательным орудием.

Напомним определение полного интеграла, сформулировав это определение для любого числа независимых переменных. *Соотношение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и параметры в числе, равном числу независимых переменных, называется полным интегралом уравнения в частных производных, если, исключая параметры из этого соотношения и из соотношений, получаемых его дифференцированием по независимым переменным, мы получаем данное уравнение.* Эквивалентно этому определению другое: *полным интегралом называется решение уравнения в частных производных первого порядка, содержащее независимые параметры в числе, равном числу независимых переменных*; при этом критерием независимости как раз является тот факт, что после упомянутого в первом определении исключения мы приходим к одному данному уравнению. Заметим, что в случае, если данное уравнение не содержит явно искомой функции, один из параметров в полном интеграле можно взять аддитивно.

Пусть мы имеем какой-нибудь полный интеграл *уравнения Якоби*:

$$V=V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\quad a_1,\ \ldots,\ a_n)+a_{n+1}.\qquad (82)$$

Из полного интеграла в случае $n+1$ независимых переменных, как и в случае двух переменных, характеристики получаются дифференцированием. Не останавливаясь на развёрнутой теории полного интеграла в общем случае, проведём это доказательство для полного интеграла уравнения Якоби.

ТЕОРЕМА ЯКОБИ. *Если известен полный интеграл* (82) *уравнения* (74), *то* $2n$ *интегралов канонической системы* (76) *даются*

равенствами:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{83}$$

где b_i наряду с a_i суть произвольные постоянные.

Доказательство. Уравнение (74) получается из полного интеграла (82) исключением параметров из уравнения (82) и $n+1$ следующих:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V'_t(t, x_1, \ldots, x_n; \quad a_1, \ldots, a_n), \tag{84$_1$}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = V'_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_n; \quad a_1, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{84$_2$}$$

Чтобы получить уравнение вида (74), надо определить из системы (84_2) параметры $a_1, \ldots, a_n$ через $\frac{dV}{dx_i}$, t, x_i и внести эти выражения в уравнение (84_1). Одно из условий разрешимости есть неравенство нулю якобиана:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_1} \cdots \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_n} \cdots \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{85}$$

Мы будем предполагать, что условие (85) выполнено. В таком случае вторая группа из n уравнений (83) даёт возможность (в некоторой области значений постоянных b_i) выразить x_i через t и параметры a_j, b_j.

Затем, подставляя эти значения в выражения

$$V_{xi}(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n),$$

определяем по первым n формулам (83) p_i в функции t и параметров a_i, b_i. Докажем, что найденные значения x_i, p_i удовлетворяют, как функции t, канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений (76). По подстановке найденных значений $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ в уравнение $\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$ оно обратится в тождество; дифференцируем это тождество по t:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \, \partial a_i} \frac{dx_k}{dt}.$$

С другой стороны, дифференцируя по параметру a_i уравнение (74), в которое на место V подставлено его значение (82), находим:

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\frac{\partial V}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}.$$

Вычитая почленно последние равенства, находим, принимая во внимание первую группу уравнений (83):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}\left(\frac{dx_k}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)=0\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так как определитель этой системы не равен нулю, то все скобки равны нулю, и мы получаем первую группу из n канонических уравнений.

Аналогично, полученное после подстановки значений x_i равенство $p_i=V'_{x_i}(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$ дифференцируем по t:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}.$$

Из уравнения (74) дифференцированием по x_i находим:

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\frac{\partial V}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_i}.$$

Вычитая оба равенства почленно и принимая во внимание уже полученные соотношения $\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}$, находим:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то-есть вторую группу уравнений (76). Теорема доказана.

4. Методы нахождения полного интеграла. Если полный интеграл уравнения Якоби используется для интегрирования канонической системы, то ясно, что к его нахождению нельзя применять первый метод Якоби, который требует предварительного нахождения характеристик. Однако в ряде случаев можно найти полный интеграл из соображений, общая теория которых относится ко *«второму методу Якоби»*. Некоторые такие соображения, относящиеся к случаю «отделения переменных», мы здесь изложим.

Весьма важный в механике случай, — когда функция Гамильтона не зависит явно от времени: $H=H(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)$. В этом случае каноническая система (76) допускает первый интеграл:

$$H(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)=h \tag{86}$$

(интеграл энергии). В самом деле, дифференцируя соотношение (86) по t и принимая во внимание уравнения (76), находим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

В этом случае полный интеграл V можно искать в виде:

$$V = -ht + W(x_1, \ldots, x_n) + a_{n+1},$$

где W — новая искомая функция. Подставляя в уравнение (74), находим:

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = h, \tag{74_1}$$

уравнение для W с n независимыми переменными (вместо $n+1$), причём в него уже входит один параметр h. Полный интеграл получится в виде:

$$V = -ht + W(x_1, \ldots, x_n;\ h;\ a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_{n+1};$$

дифференцирование по параметрам $h, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и приравнивание новым постоянным [вторая группа (83)] дают n соотношений, из которых можно получить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции t и $2n$ произвольных постоянных:

$$\alpha = -t + \frac{\partial W}{\partial h}, \quad \frac{\partial W}{\partial a_j} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Вообще, если в функцию H в уравнении (74) и (74_1) явно не входит какое-нибудь независимое переменное, например x_1 (циклическая координата), можно искать полный интеграл [например, для (74_1)] в форме:

$$W = a_1 x_1 + W_1(x_2, \ldots, x_n),$$

и для W мы имеем уравнение с $n-1$ независимыми переменными:

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, a_1, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = h,$$

в которое входят два параметра h и a_1. Если найдём его полный интеграл $W_1(x_2, \ldots, x_n;\ h, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, то полный интеграл первоначального уравнения будет:

$$V = -ht + W_1(x_2, \ldots, x_n;\ a_1;\ a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_1 x_1 + a_{n+1},$$

т. е. будет содержать нужное число $n+1$ параметров. Итак, можно предполагать, что уравнение в частных производных (74_1), где мы

опять обозначим $\frac{\partial W}{\partial x_i} \equiv p_i$, уже не содержит циклических координат. Предположим далее, что функция H в уравнении (74_1) имеет вид:

$$H \equiv H(\varphi(x_1, p_1), x_2, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n) = h \tag{87}$$

(переменные x_1, p_1 отделены). Ищем решение соответствующего уравнения Якоби в форме:

$$W = W_1(x_1) + W^*(x_2, \ldots, x_n).$$

Имеем:

$$p_1 = W_1'(x_1), \quad p_j = \frac{\partial W^*}{\partial x_j} \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Подставляя в уравнение (87), находим:

$$H[\varphi(x_1, W_1'(x_1)), x_2, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n] = h.$$

Если теперь подобрать $W_1(x_1)$ так, чтобы было

$$\varphi(x_1, W_1'(x_1)) = a_1, \tag{88}$$

где a_1 — произвольная постоянная, то нахождение W_1 сведётся к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (88), а нахождение W сведётся к интеграции уравнения с $n-1$ независимыми переменными, причём вместо исключённого переменного x_1 вошёл параметр a_1. Отсюда правило: *если в функции Гамильтона отделены переменные x_1, p_1* (87), *то составляем обыкновенное дифференциальное уравнение*:

$$\varphi(x_1, p_1) = a_1, \quad p_1 = \frac{dW_1}{dx_1};$$

квадратурой находим его решение:

$$p_1 = \psi(x_1, a), \quad W_1 = \int \psi(x_1, a)\, dx_1,$$

а затем находим полный интеграл W^* уравнения (с $n-1$ переменными):

$$H\left(a_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W^*}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial x_n}\right) = h; \tag{89}$$

тогда полный интеграл первоначального уравнения Якоби получится в виде:

$$V = -ht + \int \psi(x_1, a_1)\, dx_1 + W^*(x_2, \ldots, x_n, a_1; a_2, \ldots, a_n) + a_{n+1}.$$

Может случиться, что в левой части уравнения (89) ещё какая-нибудь пара аргументов x_i, p_i окажется отделённой; тогда применяем тот же процесс, уменьшающий число независимых переменных.

В механике и физике интеграция канонических систем при помощи сведения к уравнению Якоби с успехом применяется только в тех случаях, когда нахождение полного интеграла сводится при надлежащем выборе координат к последовательному отделению всех пар переменных.

Пример (Якоби). Движение планеты в полярных координатах приводит к уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\frac{k^2}{r}-\alpha,$$

где α — произвольная постоянная (*постоянная энергии*). Якоби выделяет уравнение:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta,$$

после чего остаётся

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2=\frac{k^2}{r}-\alpha-\frac{\beta}{r^2}$$

$\Big($переменные r, $\frac{\partial W}{\partial r}$ отделены$\Big)$; его интеграл:

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+F(\varphi,\ \psi),$$

и для F получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta.$$

Вводя соотношение $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2=\gamma$ (ψ — циклическая координата), получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2=\beta-\frac{\gamma}{\sin^2\varphi}\,;$$

из этих уравнений находим:

$$F(\varphi,\ \psi)=\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\,\psi,$$

и окончательно (без аддитивной постоянной):

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\,\psi.$$

Решение канонической системы (нет нужды её выписывать) есть

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha'-t,\quad \frac{\partial W}{\partial \beta}=\beta',\quad \frac{\partial W}{\partial \gamma}=\gamma'$$

(α', β', γ' — произвольные постоянные) или, после выполнения дифференцирования,

$$t-\alpha' = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}},$$

$$\beta' = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}} + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}},$$

$$\gamma' = -\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi.$$

Очевидно, квадратуры вычисляются в элементарных функциях.

§ 7. Геометрическая теория уравнений с частными производными первого порядка.

1. Конус T. Рассмотрим уравнение:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

считая точку (x, y, z) данной, фиксированной. В таком случае уравнение (1) устанавливает связь между угловыми коэффициентами p и q всех элементов первого порядка (x, y, z, p, q), удовлетворяющих данному уравнению в частных производных и имеющих общую точку (x, y, z). Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку (x, y, z),

$$Z-z = p(X-x)+q(Y-y), \tag{90}$$

соотношение (1) выделяет семейство от одного параметра, за который мы можем принять, например, q. Огибающая этого семейства есть некоторый конус; назовём его *конусом* T; его прямолинейные образующие являются характеристиками (в смысле дифференциальной геометрии) рассматриваемого семейства плоскостей. Найдём уравнение образующих конуса T; для этого дифференцируем уравнение (90) по параметру q:

$$\frac{dp}{dq}(X-x)+(Y-y)=0.$$

Производную $\frac{dp}{dq}$ находим из уравнения (1):

$$P\frac{dp}{dq}+Q=0;$$

подставляя её значение в предпоследнее уравнение, находим:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}. \tag{91}$$

Уравнения (90) и (91) при фиксированных p и q, связанных соотношением (1), определяют образующие конуса T; эти уравнения можно написать в симметричной форме:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{Pp+Qq}. \tag{92}$$

Сопоставляя уравнения (92) с уравнениями (48_1), (48_2) и условием (54), мы видим, что каждая характеристика, проходящая через точку (x, y, z), касается одной из образующих конуса T. В частности, если дана интегральная поверхность, проходящая через данную точку, то её касательная плоскость, очевидно, принадлежит семейству (90), (1); направление характеристической линии на этой поверхности в точке (x, y, z) совпадает с направлением той образующей конуса T, по которой этот конус касается касательной плоскости к поверхности. Так как (x, y, z) есть произвольная точка поверхности, то мы приходим к новому, геометрическому определению *характеристических линий на интегральной поверхности*: это — *линии, касающиеся в каждой точке (x, y, z) поверхности той образующей соответствующего этой точке конуса T, которая лежит в касательной плоскости к поверхности.*

Чтобы получить уравнение конуса T, надо исключить p и q из уравнений (1) и (92); из системы (92) p и q определяются как функции $x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}$; подставляя их выражения в уравнение (1), получим уравнение конуса T вида:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right)=0. \tag{93}$$

Если уравнение в частных производных дано в разрешённом виде:

$$p=f(x, y, z, q), \tag{18}$$

где f — дважды дифференцируемая функция своих аргументов, то система (92) имеет вид:

$$X-x=\frac{Y-y}{-f'_q}=\frac{Z-z}{f-qf'_q},$$

или

$$\frac{Y-y}{X-x}=-f'_q, \quad \frac{Z-z}{X-x}=f-qf'_q. \tag{92_1}$$

Первое из уравнений (92_1) может быть разрешено относительно q, если $f''_{qq}\neq 0$ (тождественное обращение в нуль второй производной соответствует случаю линейного уравнения, для которого конус T вырождается в прямую, см. ниже, п. 3). Подставляя найденное значение q в уравнение (18), а затем значения p и q во второе уравнение (92_1), найдём уравнение конуса T в виде:

$$Z-z=(X-x)\varphi\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}\right). \tag{93_1}$$

Обратно, если дано уравнение (93) или (93_1), относящее каждой точке (x, y, z) конус с текущими координатами X, Y, Z, то, рассматривая этот конус, как конус T некоторого уравнения в частных производных первого порядка, мы можем найти это последнее; а именно, это будет уравнение, связывающее угловые коэффициенты p и q касательных плоскостей к конусу. Будем исходить из уравнения (93_1) как более простого. Обозначим через φ_1 производную от φ по аргументу $\frac{Y-y}{X-x}$; тогда для угловых коэффициентов касательных плоскостей к конусу (93_1) получаются выражения:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} \equiv p = \varphi - \varphi_1 \frac{Y-y}{X-x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} \equiv q = \varphi_1\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}\right). \tag{94}$$

Из второго уравнения (94) можно выразить $\frac{Y-y}{X-x}$ через x, y, z, q $\Big($если бы производная от φ_1 по $\frac{Y-y}{X-x}$ оказалась тождественным нулём, это означало бы, что φ — линейная функция последнего аргумента, т. е. конус вырождается в плоскость$\Big)$. Подставляя найденное выражение в первое из уравнений (94), мы получим уравнение в частных производных вида (18).

Если конус задан уравнением (93), то уравнение в частных производных получится исключением отношений $\frac{Y-y}{X-x}$ и $\frac{Z-z}{X-x}$ из уравнений (93) и следующих:

$$p = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}\,\frac{Y-y}{X-x} + \frac{Z-z}{X-x}, \quad q = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \tag{94_1}$$

где Φ_1 и Φ_2 обозначают частные производные от Φ соответственно по предпоследнему и последнему аргументам. Получим уравнение вида (1), соответствующее конусу (93).

Примечание. С точки зрения введённой нами геометрической интерпретации является возможным истолковать упомянутое в сноске на стр. 404 дополнительное условие для возможности решения общей задачи Коши. Оно состоит в существовании общего решения относительно p_0 и q_0 уравнений (54) и (58). При заданных функциях $x_0(v)$, $y_0(v)$, $z_0(v)$ уравнение $z_0(v) - p_0 x_0'(v) - q_0 y_0'(v) = 0$ определяет при фиксированном v пучок плоскостей с осью $\frac{X-x_0}{x_0'} = \frac{Y-y_0}{y_0'} = \frac{Z-z_0}{z_0'}$; уравнение (54), как мы видели, определяет семейство плоскостей, касательных к конусу T. Таким образом, условие, о котором идёт речь, сводится к тому, чтобы в числе плоскостей пучка существовала плоскость, касательная к T. Если, например, T есть конус второго порядка, то это условие равносильно требованию, чтобы через ось пучка, т. е. касательную к начальной прямой, можно было провести действительную касательную к конусу T.

2. Кривые Монжа. Заменяя в уравнении (93) или (93_1) приращения $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ соответственно дифференциалами dx, dy, dz, мы получаем уравнение Монжа:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)=0, \tag{95}$$

однородное относительно дифференциалов и нелинейное (линейное уравнение — уравнение Пфаффа — соответствует вырождению конуса T в плоскость). Это уравнение определяет кривые в пространстве, обладающие тем свойством, что в каждой точке такая кривая касается одной из характеристических линий уравнения (1), проходящих через данную точку (*кривые Монжа*, «интегральные кривые» по терминологии Софуса Ли). В число этих кривых входят характеристические кривые уравнения (1) (т. е. кривые, являющиеся носителями характеристик первого порядка); геометрически это очевидно из определения; это же можно усмотреть и из того факта, что вдоль характеристик выполняются соотношения (1) и (48_1), (48_2), следствием которых является уравнение (95). Но множество кривых Монжа значительно обширнее, чем множество характеристик, так как эти последние образуют семейство от трёх параметров, а общее решение уравнения Монжа (95) зависит от произвольной функции. В самом деле, уравнение (95) есть обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя искомыми функциями; для его интегрирования можно одну из функций задать произвольно, например $z=\psi(x)$, и для определения $y(x)$ останется проинтегрировать уравнение первого порядка:

$$\Phi\left(x, y, \psi, (x), \frac{dy}{dx}, \psi'(x)\right)=0.$$

Мы видели, что если в качестве начальной кривой взять характеристическую линию, задача Коши становится неопределённой; посмотрим, как обстоит дело, если за начальную кривую взять одну из кривых Монжа (не характеристических). Возьмём уравнение в частных производных в форме (18) и соответствующее уравнение Монжа в виде, соответствующем уравнению конуса T (93_1):

$$\frac{dz}{dx}=\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right). \tag{95_1}$$

Пусть начальная кривая задана в параметрической форме:

$$x=x_0(v), \quad y=y_0(v), \quad z=z_0(v), \tag{96}$$

причём имеет место тождество:

$$z_0'=x_0'\varphi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{y_0'}{x_0'}\right).$$

Формулы (94), с заменой приращений дифференциалами, однозначно определяют $p_0(v)$ и $q_0(v)$, причём легко проверить, что выполняется тождество $z_0'-p_0x_0'-q_0y_0'=0$. Так как следствием формул (94) и уравнения (93_1) является уравнение (18), то $x_0, \ldots, q_0$ связаны также соотношением

$p_0 = f(x_0, y_0, z_0, q_0)$. Подставляя начальные значения, как функции параметра v, в уравнения характеристик (52), мы получаем семейство характеристик от одного параметра, касающихся в каждой точке начальной кривой; соответствующие формулы имеют вид:

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v),\quad p = p(u, v),\quad q = q(u, v), \tag{97}$$

причём, ввиду выполнения условий (54_1) и (58), имеем тождественно относительно u, v:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Однако в окрестности кривой $u = 0$ первые два уравнения (97) не могут быть однозначно разрешены относительно u, v, так как начальная кривая *касается характеристик, и, следовательно,* $\left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{u=0} = 0$. Но вне кривой $u = 0$ первые три уравнения (97), вообще говоря, определяют интегральную поверхность; эта поверхность содержит кривую Монжа (96), которая является для поверхности особой линией (ребром возврата). Таким образом, *если за начальную кривую взята кривая Монжа, то не существует интегральной поверхности, непрерывно дифференцируемой на этой кривой*; однако *существует интегральная поверхность, составленная из характеристик, касающихся кривой Монжа, причём эта кривая является ребром возврата поверхности.*

На этом замечании основан метод нахождения кривых Монжа, при котором в формулы, выражающие координаты кривой, произвольная функция входит только под знаком производной (а не под знаком квадратуры, и тем более не входит в подлежащее интегрированию дифференциальное уравнение).

Пусть дано уравнение Монжа (95) или (95_1). Строим соответствующее ему уравнение в частных производных (1) или (18), пользуясь формулами (94) или (94_1), и пусть его полный интеграл есть

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{19_1}$$

Беря произвольную функцию $b = \omega(a)$, мы получаем общий интеграл, присоединяя к уравнению (19_1) уравнение:

$$\varphi'_a + \varphi'_b \omega'(a) = 0. \tag{29}$$

Для постоянных значений a уравнения (19_1) и (29) дают характеристики на поверхности, определённой общим интегралом; чтобы найти ребро возврата этой поверхности — огибающую семейства характеристик, зависящего от параметра a, — заметим, что уравнение (29) представляет проекцию семейства характеристик на плоскость xOy; находим огибающую этого плоского семейства, дифференцируя (29) по параметру:

$$\varphi''_{aa} + 2\varphi''_{ab}\omega'(a) + \varphi''_{bb}\omega'^2(a) + \varphi'_b\omega''(a) = 0. \tag{98}$$

Уравнения (19_1), (29) и (98), будучи разрешены относительно x, y, z, представят огибающую характеристик на интегральной поверхности, т. е. кривую Монжа; её уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(a, \omega(a), \omega'(a), \omega''(a)),\\ y &= \psi_2(a, \omega, \omega', \omega''),\\ z &= \psi_3(a, \omega, \omega', \omega''); \end{aligned}$$

они содержат, кроме произвольной функции $\omega(a)$, только её производные. Так как всякая кривая Монжа является огибающей характеристик той интегральной поверхности, которая даётся тремя первыми формулами (97), то мы вправе ожидать, что полученное решение будет общим.

Пример 16. Уравнение Монжа $(dz+x\,dy+y\,dx)^2=4(z+xy)\,dx\,dy$. Переписываем его в виде $\frac{dz}{dy}=-y-x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}}$. По формулам (94) находим:

$$p=-y-x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}}+x\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dx}{dy}}=$$
$$=-y+\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}};\quad q=-x+\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dx}{dy}};$$

исключая $\frac{dy}{dx}$, получаем: $(p+y)(q+x)=z+xy$, или $z=px+qy+pq$ — уравнение в частных производных, соответствующее данному уравнению Монжа. Его полный интеграл $z=ax+by+ab$. Безинтегральное выражение общего решения уравнения Монжа получается из уравнений:

$$z=ax+\omega(a)y+a\omega(a),\quad x+\omega' y+\omega+a\omega'=0,$$
$$\omega'' y+a\omega''+2\omega'=0,\quad \text{или}\quad y=-a-\frac{2\omega'}{\omega''},$$
$$x=\frac{2\omega'^2}{\omega''}-\omega,\quad z=-a\omega+2\frac{a\omega'^2}{\omega''}-\frac{2\omega\omega'}{\omega''}.$$

ЗАДАЧИ.

223. Найти дифференциальное уравнение (Монжа) кривых, касательная которых образует в каждой точке угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью xOy; найти безинтегральное выражение общего решения.

224. Найти общее решение уравнения $dz^2=4\,dx\,dy$.

225. Найти уравнение Монжа, соответствующее уравнению в частных производных $pq=z$, и написать общее решение.

3. Сравнение с теорией линейных уравнений в частных производных. Изложенная нами теория полного и общего интеграла нигде не зависела от предположения, что данное уравнение нелинейное. Она поэтому целиком прилагается и к линейному уравнению:

$$P(x, y, z)\,p+Q(x, y, z)\,q=R(x, y, z). \tag{99}$$

Заметим только, что мы в главе VIII строили общее решение из двух первых интегралов вспомогательной системы двух обыкновенных уравнений; пусть эти интегралы будут:

$$u(x, y, z)=C_1,\quad v(x, y, z)=C_2. \tag{100}$$

Мы можем, в частности, построить *полный интеграл, линейный относительно двух произвольных постоянных* a, b:

$$V\equiv u(x, y, z)+av(x, y, z)+b=0. \tag{101}$$

Легко видеть, что, обратно, если полный интеграл линейно зависит от произвольных постоянных,

$$V\equiv f(x, y, z)\,a+g(x, y, z)\,b+h(x, y, z)=0,$$

то полученное из него в результате исключения этих постоянных уравнение в частных производных будет линейным.

Из полного интеграла (101) мы легко приходим к известному нам общему решению уравнения (99).

В самом деле, согласно теории общего интеграла, полагаем $b=\omega(a)$; равенство (101) перепишется так:

$$u+av+\omega(a)=0.$$

Дифференцируем последнее равенство по a:

$$v+\omega'(a)=0,$$

откуда a получается как некоторая функция от v; подставляя эту функцию в предпоследнее равенство, имеем общий интеграл:

$$u=\psi(v).$$

Определение характеристических линий из полного интеграла (101) даёт нам:

$$u+av+b=0, \quad v+c=0,$$

или

$$u=ac-b, \quad v=-c,$$

т. е. уравнения, эквивалентные системе (100), опять в согласии с теорией линейных уравнений в частных производных.

Однако уже здесь можно отметить различие с теорией нелинейных уравнений — семейство характеристических линий линейного уравнения зависит только от двух (существенных) параметров.

При применении метода Коши обнаруживается более глубокое различие между двумя типами уравнений.

В методе Коши конус T определялся при постоянных x, y, z как огибающая семейства плоскостей:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{90}$$

где p и q связаны данным уравнением, т. е. в случае линейного уравнения, линейным соотношением:

$$Pp+Qq=R. \tag{99}$$

В этом случае семейство плоскостей есть пучок, а огибающая, т. е. конус T, вырождается в ось пучка с уравнениями (62) и

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q},$$

или

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}.$$

Таким образом, направление характеристической кривой однозначно определено в каждой точке рассматриваемой области про-

странства. Соответствено этому, дифференциальные уравнения характеристических кривых

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{102}$$

не содержат величин p, q и могут быть проинтегрированы без предварительного задания интегральной поверхности. Итак, *в случае линейного уравнения характеристические линии уже являются характеристиками* (*нулевого порядка*). Семейство характеристик нулевого порядка зависит от двух параметров. Для интеграции уравнения (99) нет надобности дополнять систему (102) добавочными уравнениями. Если всё же ввести эти добавочные уравнения, то при их интеграции для получения характеристик первого порядка одно из начальных значений p_0, q_0 остаётся произвольным, другое определится из уравнения:

$$P(x_0, y_0, z_0) p_0 + Q(x_0, y_0, z_0) q_0 = R(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, каждая характеристика нулевого порядка является носителем ∞^1 характеристик первого порядка; семейство характеристик первого порядка и в случае линейного уравнения зависит от трёх произвольных постоянных.

ЗАДАЧА.

226. Пусть уравнения характеристик нулевого порядка для (102) будут $y = g(x; y_0, z_0)$, $z = h(x; y_0, z_0)$, где начальные значения y_0, z_0 соответствуют $x = x_0$. Найти характеристики первого порядка.

Указание. Воспользоваться соотношением $dz = p\,dx + q\,dy$.

ГЛАВА X [1]).

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК.

Настоящий очерк истории теории дифференциальных уравнений не претендует на полноту. В нём содержатся лишь краткие сведения о возникновении этой математической дисциплины и её развитии за последние два с половиной века. При этом, естественным образом, главное внимание обращено на те вопросы, которые были рассмотрены в предыдущих главах.

С задачами, относящимися к теории дифференциальных уравнений в собственном смысле этого слова, математики встретились на рубеже XVI—XVII вв., — впервые, вероятно, в области вычислительной математики, при создании логарифмических таблиц. Стремясь дать определение логарифма, пригодное для непрерывной величины — по существу для всех действительных положительных чисел, Дж. Непер (1550—1617) отправным пунктом избрал не сопоставление двух дискретных прогрессий — арифметической и геометрической, а кинематическое представление о двух связанных между собой непрерывных прямолинейных движениях.

Точка M, выходя из положения O, движется с постоянной скоростью v; точка N, выходя со скоростью v из положения A на отрезке AB, равном 10^7, движется замедленно с переменной скоростью, пропорциональной её расстоянию NB до конца B. Длина отрезка OM и является неперовым логарифмом величины NB. Обозначив $OM = y$ и $NB = x$, мы можем выразить скорости обеих точек уравнениями:

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{vx}{10^7},$$

а зависимость между числом x и его неперовым логарифмом $y = Lx$ — дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10^7}{x}; \quad x_0 = 10^7, \quad y_0 = 0.$$

---

[1]) Эта глава написана А. П. Юшкевичем.

Сам Непер ввёл логарифмическую функцию, определяемую этим уравнением $\left(\text{т. е.}\ y = Lx = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}\right)$ только таблично; при этом его приёмы вычисления таблиц логарифмов фактически давали приближённое интегрирование указанного уравнения.

Отрезок AB принят был Непером равным 10^7 потому, что такое значение давали обычно в те времена синусу прямого угла; при этом неперовы логарифмы синусов первой четверти, приведённые в его таблицах с 8 знаками, представлялись положительными целыми числами.

Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям, появлялись и в области математического естествознания, например в проблеме падения тяжёлого тела в среде без сопротивления, которую решил Г. Галилей (1564—1642; опубл. в 1638 г.)[1]) и в оптике. Открытие закона преломления света позволило Р. Декарту (1596—1650) около 1628 г. поставить и решить первую из так называемых «обратных задач на касательные». Речь шла об определении поверхностей линз вращения, которые преломляют лучи, выходящие из одной данной точки в другую данную точку; другими словами, задача состоит в том, чтобы найти плоскую кривую, для которой синусы углов нормали в любой её точке M с прямыми, соединяющими точку M с двумя данными точками, находились бы в постоянном отношении. Применив бесконечно малые, Декарт открыл так называемые декартовы овалы, кривые четвёртого порядка, уравнения которых в биполярных координатах пишутся в виде

$$mr_1 + nr_2 = \text{const}.$$

«Обратная задача на касательные», т. е. задача об определении кривых, касательные к которым обладают заданным свойством, сыграла видную роль в предистории интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Несколько таких задач поставил перед Декартом в 1638 г. Ф. Дебон (1601—1652); в частности он поставил задачу об отыскании кривой, подкасательная s_t которой удовлетворяет уравнению

$$\frac{y}{s_t} = \frac{x-y}{a}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}.$$

Путём преобразования координат, соответствующего подстановкам $x = \frac{X}{\sqrt{2}}$ и $y = Y + \frac{X}{\sqrt{2}} - a$, Декарт (говоря по-современному) свёл

[1]) Путь, проходимый телом при прямолинейном равномерно-ускоренном движении, Галилей вычислял как площадь треугольника, образованного отрезком оси t, прямой $v = gt$ и какой-либо ординатой этой прямой.

последнее уравнение к виду

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{Y}{a\sqrt{2}},$$

т. е. к той же задаче, которую решал за четверть века до него Непер. Не располагая понятием логарифмической функции, Декарт дал кинематический приём определения точек искомой кривой как точек пересечения двух движущихся прямых. Он высказал также мнение, что кривая трансцендентная, — по его терминологии — механическая, — а заодно и убеждение, что общего метода решения подобных задач существовать не может. Довольно скоро, однако, решение тех обратных задач на касательные, дифференциальные уравнения которых непосредственно допускают разделение переменных, сведено было к задаче квадратур. Это удалось в 1669—1670 гг. И. Барроу (1630—1677), который в геометрической форме показал, что кривая, подкасательная которой определяется условием

$$\frac{s_t}{y} = \frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

сама определяется уравнением, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\int f(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx.$$

С работ И. Ньютона (1642—1727) и Г. В. Лейбница (1646—1716) начинается первый период истории дифференциальных уравнений, охватывающий последнюю четверть XVII и весь XVIII век. Изучение проблем динамики точки и твёрдого тела, а также некоторых геометрических задач методами дифференциального и интегрального исчислений вскоре привело к выделению простейших классов обыкновенных уравнений первого и второго порядков.

В первой половине XVIII в. дифференциальные уравнения становятся основным орудием исследования не только в механике, но и в дифференциальной геометрии и вариационном исчислении. К концу этого времени задачи математической физики, прежде всего задача о колебании струны, облекаются в форму дифференциальных уравнений с частными производными, а во второй половине XVIII в. такие уравнения получают широкое применение и в теории поверхностей.

И подобно тому, как математический анализ в XVIII в. развивался как анализ отдельных классов (аналитических) функций, так и теория дифференциальных уравнений разрабатывалась как учение о различных конкретных типах дифференциальных уравнений. Главные усилия сосредоточены были на частных методах интегрирования и сведения решения к элементарным функциям и их квадратурам, которое при невозможности такого решения заменялось приближённым интегрированием. Общие проблемы теории — вопросы существования, поведе-

ния интегральных кривых, природы особых точек и т. д. — подобно общим вопросам теории функций оставались в стороне. При этом, как и ряд других дисциплин, теория дифференциальных уравнений развивалась первоначально внутри математического анализа, и лишь постепенно, по мере выяснения особенностей её проблем и установления её центральных понятий, выделилась в особую математическую науку.

Ряд дифференциальных уравнений был проинтегрирован Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1686), второй закон которых сам автор сформулировал словами: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует», а мы записываем дифференциальным уравнением

$$\frac{d(mv)}{dt} = \boldsymbol{F}.$$

Так, в задаче о прямолинейном движении точки под действием силы, пропорциональной расстоянию от центра притяжения, Ньютон решил уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

а в задаче о прямолинейном движении тяжёлой точки в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, — уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m \pm n\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

В «Математических началах», которые были изложены с помощью синтетико-геометрических построений, отсутствовала запись дифференциальных уравнений и их интегралов в аналитической форме; чисто аналитическую трактовку задач механики ввёл впервые Л. Эйлер. В явном виде дифференциальные уравнения встречаются в «Методе флюксий и бесконечных рядов» Ньютона, написанном около 1671 г. и изданном в 1736 г.

Уже в самой формулировке двух взаимно обратных задач метода флюксий, как именовалось у Ньютона исчисление бесконечно малых (флюксия соответствовала нашей производной), поставлена была общая проблема интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. Первая задача Ньютона гласила: «по данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями» [1]), а вторая: «по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами». Таким образом, для случая одной независимой переменной во второй проблеме речь шла о решении

[1]) Флюенты, т. е. переменные величины, x, y рассматривались как функции параметра t — «времени».

уравнения

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

В примерах на вторую проблему у Ньютона имеется частный случай уравнения в полных дифференциалах:

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0,$$

где M и N — целые рациональные функции. Решение при этом даётся в квадратурах. Но общим методом, который Ньютон применял к линейным и некоторым другим уравнениям, являлся метод последовательных приближений, дававший решение в виде бесконечного степенного ряда по положительным или отрицательным степеням аргумента. Представление решения в форме ряда было естественно для Ньютона потому, что одни уравнения не интегрировались в квадратурах, а во многих других квадратуры приводили к недостаточно изученным трансцендентным функциям. Ньютон, видимо, не стремился вообще к разысканию конечных аналитических выражений интегралов уравнений. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{a-x}$$

он преобразует к виду

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{a}+\frac{xy}{a^2}+\frac{x^2y}{a^3}+\ldots$$

и даёт (частное) решение в форме

$$y=x+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{2a^2}+\ldots$$

Между тем это же решение такого уравнения можно, идя другим путём, выразить функцией

$$y=\frac{1}{a-x}\left[\frac{a^2}{2}-\frac{(a-x)^2}{2}\right].$$

Как правило, Ньютон ищет решение со свободным членом, равным нулю, но вместе с тем указывает, что, произвольно выбирая свободный член, можно получить и бесконечное множество решений.

Ньютон рассматривал и уравнения с тремя и более переменными. Для него было ясно, что при этом для интегрирования, вообще говоря, следует вводить дополнительные соотношения между переменными. Так, в случае уравнения

$$x\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}+2=0$$

можно принять дополнительно

$$x = y \quad \text{или} \quad 2y = a + x, \quad \text{или} \quad y^2 = x,$$

и вообще — в пределах известных в то время функций — произвольное соотношение между x и y.

Иное направление получила разработка дифференциальных уравнений у Лейбница, который, между прочим, ввёл в употребление самый термин «дифференциальное уравнение»[1]), и его ближайших последователей Якова Бернулли (1654—1705) и Ивана Бернулли (1667—1748). Лейбниц, а за ним братья Бернулли также применяли для решения дифференциальных уравнений разложения в степенные ряды. Наряду с этим, однако, они в процессе систематической разработки алгоритма исчисления бесконечно малых положили начало классификации обыкновенных дифференциальных уравнений и методам их решения посредством сведения к квадратурам.

Простейшим видом дифференциальных уравнений являются уравнения с разделяющимися переменными, и естественно, что усилия были направлены, прежде всего, на приведение уравнений первого порядка к этому виду. Так, Лейбниц уже в 1693 г. достиг этой цели для однородных уравнений с помощью подстановки $y = ux$, а вскоре и для линейного уравнения, заменяя y произведением двух искомых функций u, v. В 1696—1697 гг. Лейбниц и братья Бернулли решили таким же путём предложенное старшим Бернулли уравнение

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n;$$

вместе с тем Лейбниц и И. Бернулли показали, что при замене $y^{1-n} = u$ последнее уравнение переводится в линейное.

В нескольких случаях И. Бернулли употребил и интегрирующий множитель. В частности, в 1700 г. он показал, как с помощью множителя вида x^p можно последовательно понижать порядок линейного уравнения

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

позднее названного по имени Эйлера (который нашёл употребляемый теперь приём решения с помощью подстановки $x = e^t$ в 1740 г.); впрочем, решение Бернулли не было своевременно опубликовано автором. Незадолго перед тем (1697) И. Бернулли поставил и решил важную задачу о траекториях, метод решения которой немедленно дал также Лейбниц.

---

[1]) Впервые в письме к Ньютону от 1676 г., а затем в печати, начиная с 1684 г.

Некоторые простые дифференциальные уравнения тогда же были проинтегрированы при решении задачи о кривой быстрейшего спуска — брахистохроне.

Для уравнений второго порядка, не содержащих явно одной из переменных, Я. Бернулли предложил приём сведения к уравнениям первого порядка с помощью введения параметра $y' = p$; однако работа Бернулли была напечатана много лет спустя после того, как Дж. Риккати (1676—1754) в 1715 г. опубликовал тот же приём.

В дальнейшей разработке теории обыкновенных дифференциальных уравнений приняли участие крупнейшие учёные XVIII в. Особенно велик был вклад знаменитого петербургского академика Л. Эйлера (1707—1783), а затем французских математиков А. Клеро (1713—1765), Ж. Даламбера (1717—1783) и Ж. Л. Лагранжа (1736—1813).

Черпая материал из многочисленных задач механики, в том числе небесной механики, баллистики, геометрии и самого математического анализа, Эйлер обогатил теорию дифференциальных уравнений целым рядом первоклассных открытий.

В мемуаре, напечатанном в 1743 г., Эйлер дал классический метод решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами при помощи подстановки $y = e^{kx}$ и в случае действительных кратных корней — подстановки $e^{kx}u$. Аналогичная подстановка $e^{\alpha x}u$ в случае пары комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ позволила ему свести вопрос к уравнению

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 u = 0,$$

тригонометрическое решение которого было ему известно [1]). В этом же мемуаре Эйлер указал, что общим решением уравнения порядка n является линейная комбинация его n частных решений, впервые введя попутно самые термины «частное решение» (valor particularis) и «общее решение» (aequatio integralis completa, полное интегральное уравнение) [2]). Через 10 лет Эйлер опубликовал способ решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами путём последовательного понижения его порядка. Умножая, напри-

---

[1]) Рассматривая одно такое уравнение, Эйлер в 1740 г. получил его частное решение в двух различных видах: $2\cos x$ и $e^{xi} + e^{-xi}$ и убедился в их тождестве с помощью разложений в ряды; это и привело его к открытию знаменитой формулы, носящей его имя.

[2]) Одновременно линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами решил Д. Бернулли (1700—1782), в 1725—1733 гг. бывший действительным, а затем почётным членом Петербургской Академии наук. Решение Бернулли было обнародовано в 1751 г. Приём получения решения в случае кратных корней, например двойного корня k из выражения $\frac{e^{k_1x} - e^{kx}}{k_1 - k}$ при $k_1 \to k$, восходит к Даламберу (1748). В дальнейшем даты в скобках везде означают год публикации работы.

мер, уравнение

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} = X$$

на e^{mx}, он принимал, что решение возникающего уравнения имеет вид

$$e^{mx}\left(A_1 y + B_1 \frac{dy}{dx}\right) = \int Xe^{mx}\, dx,$$

где A_1 и B_1 — неопределённые коэффициенты; дифференцируя обе части последнего уравнения и почленно сравнивая результат с данным уравнением, он находил A_1, B_1 и m. Даламбер позднее установил, что общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения его и общего решения однородного с теми же коэффициентами (1766), а Лагранж в 1766—1777 гг. детально разработал метод вариации постоянных [1]) и применил его к указанному типу уравнений.

Вместе с тем Лагранж указал, что когда известно r частных решений однородного линейного уравнения, то его порядок можно понизить на r единиц [2]).

Существенные успехи достигнуты были Л. Эйлером и А. Клеро в исследовании условий интегрируемости дифференциальных выражений, предпосылкой чего явилась открытая в 1721 г. Ник. I Бернулли (1687—1759) и позднее доказанная Эйлером теорема о независимости результата дифференцирования от его порядка, и в теории интегрирующего множителя. Условие интегрируемости выражения

$$M\,dx + N\,dy$$

установили Клеро (1740) и Эйлер; в следующем году Клеро указал условие интегрируемости для

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

и известный метод интегрирования полного дифференциала. Для некоторых видов уравнений Клеро нашёл и интегрирующий множитель. Однако уравнения $M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$, для которых условие интегрируемости не выполнено, считали в то время лишёнными смысла, упустив из виду правильные замечания по этому вопросу, сделанные Ньютоном.

---

[1]) Метод вариации был известен ещё ранее Эйлеру, применившему его в сочинении о приливах и отливах к уравнению второго порядка (1740), а затем в некоторых работах о возмущениях планетных орбит. Этот же приём независимо открыл Д. Бернулли (1740).

[2]) Понятие линейной независимости системы функций было точно сформулировано в середине XIX в. Условие линейной независимости, выраженное с помощью определителя Г. Вронского (польский математик, 1775—1853, введший этот определитель в 1821 г.), дали Л. Гессе (1811—1874) в 1857 г. и Э. Кристофель (1829—1900) в 1858 г. Термин «фундаментальная система» ввёл Л. Фукс (1833—1902) в 1866 г.

Особенно широкое развитие метод интегрирующего множителя получил в работах Эйлера 1768—1769 гг., в которых был установлен ряд классов дифференциальных уравнений первого порядка, обладающих множителем заданного вида. В следующем году Эйлер распространил метод интегрирующего множителя на уравнения высших порядков. Он использовал при этом найденное им (1766) с помощью вариационного исчисления условие, при котором $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ является полной производной другой функции, содержащей производные до порядка $n-1$. Это условие без посредства вариационного исчисления вывел (1771) другой член Петербургской Академии наук А. И. Лекселль (1740—1784).

Одним из наиболее важных применений теории интегрирующего множителя явилось открытие Лагранжем (1766) уравнения, сопряжённого с данным однородным линейным уравнением, и факта взаимной сопряжённости обоих уравнений. С большей отчётливостью этот факт был выражен позднее Эйлером (1778).

Перечислить открытия Эйлера в теории обыкновенных дифференциальных уравнений здесь было бы невозможно. Отметим ещё его исследования свойств общего уравнения Риккати[1]) (если известен частный интеграл u этого уравнения, то подстановка $y = u + \frac{1}{z}$ сводит его к линейному, а если известны два интеграла, то для интегрирования требуется лишь одна квадратура). В связи с проблемой колебаний растянутой круговой мембраны Эйлер пришёл к уравнению

$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right) u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0,$$

позднее названному уравнением Бесселя, а решение его представил в виде бесконечного ряда, лишь постоянным множителем отличающегося от цилиндрической функции $J_\beta(\alpha r)$ (1766), частный случай которой при $\beta = 0$ встретился ещё ранее Д. Бернулли при исследовании колебаний тяжёлых цепей (опубл. в 1738 г.).

В 1768 г. Эйлер нашёл алгебраический интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = 0,$$

где P — целый многочлен четвёртой степени, тем самым получив важную теорему сложения эллиптических интегралов.

---

[1]) Риккати рассматривал частные случаи уравнения, носящего, по предложению Даламбера, его имя. В случае уравнения

$$b\frac{dy}{dx} = y^2 + ax^n$$

Д. Бернулли (1724) и сам Риккати одновременно показали, что оно допускает разделение переменных в случае $n = -\frac{4k}{2k \pm 1}$ (где k — любое целое или $k = \infty$).

С особым решением уравнения первого порядка впервые встретился Б. Тейлор (1685—1731) в 1715 г. Рассматривая уравнение

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2,$$

Тейлор с помощью подстановок $x = \frac{y}{y^2}$, $v = 1 + z^2$ привёл его к виду

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1. \qquad \text{(A)}$$

Далее он продифференцировал последнее уравнение:

$$2y''(vy' - zy) = 0,$$

а затем, приравняв второй множитель нулю и подставив $y' = \frac{zy}{v}$ в уравнение (A), получил:

$$y^2 = v \quad \text{и} \quad x = 1.$$

Это решение он назвал «некоторым особым (singularis) решением задачи», не обратив, однако, внимания на его действительно особенные свойства. Двадцать лет спустя (1736) А. Клеро, опять-таки посредством дифференцирования, нашёл и определённо различил особое и общее решение уравнения

$$y = (x + 1)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

а Ж. Даламбер (1750, 1772) обобщил затем тот же приём на общее уравнение:

$$y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

иногда именуемое уравнением Лагранжа. Ряд уравнений с особыми решениями встретился также Эйлеру; начиная с 1736 г., Эйлер заметил также, что если уравнение имеет множитель $\mu(x, y)$, то уравнение $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ может давать особое решение; так, например, в случае уравнения

$$x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}\,dy$$

с

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}$$

особым решением будет $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (пример принадлежит Лагранжу). Более глубокое исследование характера особых решений произвёл Лагранж (1776), который детальнее выяснил, как их получать — либо непосредственно из дифференциального уравнения, либо из общего решения с помощью дифференцирования по постоянной; Лагранж также дал геометрическое истолкование особого решения

как огибающей семейства частных интегральных кривых. Геометрические места особых точек, а также случаи, в которых особое решение одновременно является и частным, остались при этом Лагранжу неизвестными. Лагранж занимался также особыми решениями уравнений высших порядков и проблемой разыскания уравнений, обладающих заданными особыми решениями.

С разработкой систем обыкновенных дифференциальных уравнений математическое естествознание встретилось при изучении основных уравнений динамики. Более подробное исследование систем начал Даламбер, применивший к линейным однородным системам с постоянными коэффициентами метод неопределённых множителей (1750). Подбирая множители так, чтобы линейная комбинация левых частей уравнений сводилась к виду

$$du + ku\,dt = 0,$$

Даламбер по существу получал для определения множителей так называемое вековое уравнение. Даламбер занимался также частными случаями систем уравнений второго порядка; эти исследования его были продолжены А. И. Лекселлем (1778 и 1783).

Задачи небесной механики, в частности теория движения Луны, интерес к которой в то время особенно стимулировали потребности ориентации при мореплавании, широко содействовали развитию приближённых способов интегрирования дифференциальных уравнений. Среди различных приёмов большое значение для дальнейшего имел метод Эйлера (1768) для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{A}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$. Определяя из (A) высшие производные для y и подставляя в них x_0, y_0, Эйлер находил значение y_1, соответствующее аргументу $x_1 = x_0 + h$, где h — весьма малое число, с помощью нескольких первых членов строки Тейлора; затем совершенно аналогично находились значения y_2, y_3, ..., соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h$, ...

При ограничении членами первой степени относительно h получатся формулы:

$$\begin{gathered} y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{gathered}$$

и

$$y_n = y_0 + hf(x_0, y_0) + hf(x_1, y_1) + \dots + hf(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

которые и приводятся теперь в руководствах под названием «метода Эйлера». Этот метод лёг позднее в основу одного из доказательств теоремы существования решения уравнения $y' = f(x, y)$. Теорети-

ческое исследование сходимости процесса, как это всегда имело место в XVIII в., не производилось; Эйлер замечал только, что в конкретных случаях при достаточно малых h ряды сходятся быстро. Свой метод Эйлер распространил и на уравнения второго порядка (1769). Широко применялись и разложения в бесконечные степенные ряды, а Лагранж (1779) с той же целью употребил разложения в непрерывные дроби.

Успехи математиков XVIII в. в теории уравнений с частными производными были менее значительными, но и в этой области заложены были основы дальнейшего развития. В первую очередь математики пришли к уравнениям с частными производными при изучении практических задач математической физики (дифференциально-геометрические проблемы в более широком плане поставлены были позднее), и серьёзные работы в этой области начались с изучения уравнений второго порядка.

Отправным пунктом явилась здесь одна из самых богатых следствиями задач XVIII в. — задача о колебании струны. Ею интересовался ещё Г. Галилей, но только Б. Тейлор положил начало её математическому решению (1715). Если передать в символах дифференциального исчисления установленный им закон обратной пропорциональности ускорения точки струны при поперечном колебании и радиуса кривизны струны в той же точке, то можно сказать, что для малых колебаний он пришёл к знаменитому уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Принимая некоторые весьма ограничительные посылки, Тейлор свёл задачу к двум простым линейным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и для струны, закреплённой в двух концах, нашёл, что в любой момент она имеет форму синусоиды. Само уравнение колеблющейся струны в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

записал Даламбер (1749), получивший впервые решение в виде суммы двух произвольных функций:

$$y = f(x + t) + \varphi(x - t).$$

Анализ Даламбера не был полным, ибо для него не были ясны условия, которые должны быть включены в саму формулировку проблемы. Даламбер учёл только граничные условия $x = 0$, $x = l$, позволившие ему представить решение в виде

$$y = f(t + x) - f(t - x).$$

Эйлер в следующем году указал, что колебание струны будет полностью определено, когда наряду с граничными условиями будут

заданы ещё начальные, т. е. функции, определяющие в какой-либо момент времени форму струны и скорость любой её точки. Тем самым он завершил аналитическую разработку так называемого метода характеристик Даламбера, хотя геометрическая картина явления оставлена была обоими учёными в стороне. С этого момента возникает нашумевший в XVIII в. и чрезвычайно важный спор о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными.

Эйлер считал, что обычный анализ должен ограничиваться только непрерывными функциями. Понятие непрерывности у Эйлера было, однако, отличным от того, которое вкладывается в этот термин со времён О. Коши и Б. Больцано. Под непрерывной функцией Эйлер понимал функцию, определяемую во всей области существования единым аналитическим выражением, причём вопрос о характере допустимых аналитических выражений поставлен отчётливо не был. С точки зрения Эйлера, например, две ветви гиперболы $xy=1$ образуют непрерывную кривую, а сходящиеся в начале координат лучи биссектрис первых двух четвертей с уравнениями $y=-x$ при $x\leqslant 0$ и $y=x$ при $x>0$ — линию разрывную. «Непрерывность» Эйлер усматривал в том, что благодаря единству аналитического выражения «все части кривой соединены между собой теснейшим образом, так что ни в одной из этих частей не может произойти изменения без нарушения связи непрерывности».

Таким образом, непрерывность в смысле Эйлера была родственна с тем свойством аналитических функций комплексного переменного, что задание такой функции на любом участке определяет её в целом. Функции непрерывные в современном смысле слова Эйлер именовал связными. Связные кривые, проведённые свободным движением руки, являлись для Эйлера разрывными, ибо он считал, что их нельзя выразить с помощью единой формулы. Но если обыкновенный анализ согласно Эйлеру имел своим предметом «непрерывные» функции, то уравнения с частными производными составляли новую область математики, с необходимостью применяющую функции «разрывные», поскольку начальная форма струны может быть задана произвольно. Даламбер возражал против столь широкой постановки вопроса, считая, что функции, входящие в интегралы уравнений с частными производными, должны задаваться аналитически.

В это же время с новым замечательным решением вопроса выступил Д. Бернулли (1753). Опираясь на существенно физические соображения и исходя из того, что звук, издаваемый струной, образуется главным тоном и бесчисленным множеством обертонов, он пришёл к заключению, что колебания струны как бы складываются из бесчисленного множества колебаний различных её частей, соединённых между собой в узлах. Форма струны возникает поэтому путём наложения соответствующих различным обертонам синусоид, периоды которых уменьшаются обратно пропорционально натуральным числам,

а решение представляется уравнением

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{a}+\beta\sin\frac{2\pi x}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{a}+\ldots$$

Таким образом, Д. Бернулли пришёл к открытию фундаментального в математической физике принципа наложения линейных колебаний и метода решения уравнений с частными производными, впоследствии названного методом Фурье, или методом стоячих волн.

Эйлер незадолго до Бернулли получил решение уравнения струны для одного частного случая также в виде тригонометрического ряда. Он, однако, высказал сомнение в общности решения такого вида, ибо с его точки зрения даже произвольная алгебраическая функция не может быть представлена суммой синусов, поскольку не является обязательно нечётной и наверное не является периодической, а от аналитического выражения требуется, чтобы оно определяло функцию для любых значений аргумента. Д. Бернулли, напротив, высказывал уверенность в том, что при подходящем выборе коэффициентов α, β, γ, ... тригонометрический ряд может выразить любую кривую. Он подчёркивал, что его теория «открывает возможность привести движения, существующие в природе, которые кажутся не подчинёнными никакому закону, к простым изохронным движениям, которыми, видимо, пользуется природа в большей части своих действий». Впоследствии в споре о природе интегралов уравнений с частными производными и о представимости функций тригонометрическими рядами приняли участие и другие крупные учёные, как Лагранж и П. Лаплас (1749—1827). В 1787 г. Петербургская Академия наук объявила конкурс на тему по этому вопросу и присудила премию Л. Арбога (1759—1803), ставшему в целом на сторону Эйлера против Даламбера.

Недостаточно отчётливые представления о самом понятии функции, непрерывности, аналитичности и пр. не позволили, впрочем, математикам того времени дать точное решение вопроса, в том числе вопроса о классе функций, представимых тригонометрическими рядами. Как известно, эта проблема явилась предметом исследований многих математиков XIX в.

Уравнения с частными производными высших порядков возникали и в других задачах математического естествознания — в гидродинамических исследованиях (Эйлер; Даламбер, который в 1752 г. впервые применил в этой области функции комплексного переменного), в задаче о колебании мембран (Эйлер), теории потенциала (уравнение Лапласа, 1789) и т. д. В результате были выявлены важные типы линейных уравнений с частными производными второго порядка. Но математики XVIII в. остались в целом далеки от постановки общих вопросов теории таких уравнений. В этом направлении существенны были прежде всего исследования Эйлера (1770) по преобразованию линейных уравнений второго порядка к некоторым каноническим формам

с помощью замены переменных. Так, уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

посредством подстановок

$$t = x + ay, \quad u = x - ay$$

Эйлер привёл к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} = 0,$$

откуда сразу получил общий интеграл в виде

$$z = f(t) + \varphi(u) = f(x + ay) + \varphi(x - ay).$$

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

Лаплас (1777, 1782) предложил так называемый метод каскадов, позволяющий иногда получить общий интеграл с помощью квадратур.

Уравнения с частными производными первого порядка стали возникать прежде всего в задачах геометрии. Отдельные простейшие виды их [вроде $f(p, q) = 0$] встречаются в работах Эйлера (1740 и след.). Даламбер рассмотрел линейные относительно z, p, q уравнения с постоянными коэффициентами (1768). Общее линейное уравнение

$$Pp + Qq = R$$

решили почти одновременно Лаплас и Лагранж (1776), который указал известный метод сведения интегрирования такого уравнения к интегрированию системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Несколько лет спустя Лагранж распространил свой приём на линейные уравнения с любым числом переменных (1781 и 1787), подчеркнув в связи с этим, что искусство решения уравнений с частными производными заключается в их сведении к обыкновенным.

Вопросом о решении нелинейных уравнений первого порядка занимались Эйлер, — который мимоходом заметил, что уравнение с тремя переменными приводится к линейному с четырьмя переменными (1770), — Лагранж и другие, но только П. Шарпи (1784, опубл. в 1814) довёл до конца решение нелинейного уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными по методу, носящему имя Лагранжа-Шарпи. Попытки распространения этого метода на случай более двух аргументов в XVIII в. успеха не имели.

В работах 70-х годов Лагранж установил и взаимоотношения между различными видами решений уравнений первого порядка и современную терминологию. Решение

$$z = \varphi(x, y, a, b),$$

зависящее от двух произвольных постоянных, он назвал полным. Применение вариации постоянных, употреблённой Лагранжем тогда же для обыкновенных неоднородных линейных уравнений, дало ему общий и особый интегралы. Полагая b равным произвольной функции $\psi(a)$ и исключая параметр a из уравнений

$$z = \varphi[x, y, a, \psi(a)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0,$$

Лагранж находил общее решение, а исключение обоих параметров из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

доставляло особое решение. Лагранж ввёл также самый термин «решение» дифференциального уравнения вместо «интеграла» в связи с тем, что решение не всегда требует вычисления квадратур.

Мы видели, что в некоторых случаях аналитические факты теории дифференциальных уравнений находили и геометрическое истолкование. Так, Лагранж связал учение об особых решениях обыкновенных уравнений с теорией огибающих. Однако в целом теория дифференциальных уравнений развивалась Эйлером, Даламбером и Лагранжем на аналитической и вычислительной основах. Геометрическая теория дифференциальных уравнений получила развитие главным образом в трудах Г. Монжа (1746—1818). В ряде работ, из которых важнейшие появились на рубеже XVIII и XIX вв. (1795—1807), Монж в весьма широком плане исследовал связи теории дифференциальных уравнений и теории поверхностей и пространственных кривых. Процесс интегрирования уравнений получил при этом весьма наглядную геометрическую интерпретацию. В ряде случаев само отыскание интегралов опиралось на геометрический способ образования поверхностей. Рассматривая, например, цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны прямой

$$x = az, \quad y = bz,$$

и выражая условие параллельности касательной плоскости

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1)$$

с этой прямой, Монж находил дифференциальное уравнение цилиндрических поверхностей

$$ap + bq = 1.$$

Общий интеграл этого уравнения Монж далее находит следующим образом. Уравнения образующей должны иметь вид

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

где α и β постоянны для точек каждой определённой образующей и одновременно меняются при переходе от одной образующей к другой. Из того, что α и β бывают одновременно постоянны и одновременно переменны, Монж пришёл к выводу, что они находятся в некоторой зависимости друг от друга, $\beta = \varphi(\alpha)$, откуда следовало, что конечное уравнение цилиндрических поверхностей, т. е. искомый интеграл, есть

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

При дополнительных условиях, скажем, при задании уравнений направляющей, определяется конкретный вид функции φ, дающий уравнение цилиндрической поверхности, проходящей через данную кривую.

Геометрическое истолкование уравнения

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{A}$$

позволило Монжу внести ясность в вопрос, который, как упоминалось, долгое время оставался неразрешённым, хотя правильный путь был указан ещё Ньютоном. В случае интегрируемости одним соотношением уравнение (A) определяет семейство поверхностей $f(x, y, z) = c$, на которых любые кривые ортогональны к кривым, определяемым системой

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{B}$$

в точках пересечения последних кривых с поверхностями. В общем случае, когда условие интегрируемости не выполняется, не существует семейства поверхностей, ортогональных к кривым системы (B). Однако, как выяснил Монж, и в этом случае уравнение (A) имеет смысл: при задании дополнительной зависимости между переменными $\varphi(x, y, z) = 0$ оно сводится к обыкновенному уравнению с двумя переменными и определяет однопараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ и ортогональных к кривым системы (B). Уравнение (A) впоследствии было названо по имени Пфаффа, а нелинейные уравнения вида

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

С. Ли предложил именовать уравнениями Монжа, рассматривавшего их отдельные случаи.

Монж дал геометрическую картину общей теории уравнений с частными производными первого порядка. Полный интеграл $f(x, y, z, a, b) = 0$ представляет собой двухпараметрическое семейство поверхностей. Поверхности, принадлежащие к однопара-

метрическому семейству, возникающему, если положить $b=\varphi(a)$, Монж назвал огибаемыми. Поверхность, определяемая уравнениями $f(x, y, z, a, \varphi(a))=0$ и $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ — огибающая поверхностей однопараметрического семейства, — оказывалась геометрическим образом общего интеграла. Основное значение имело введение Монжем кривых, по которым огибаемые поверхности соприкасаются с огибающей, т. е. кривых, определяемых уравнениями $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ при фиксированных значениях параметра a. Эти кривые Монж назвал характеристиками, поскольку они определяют характерные свойства образуемых ими огибающих интегральных поверхностей. Наконец, огибающую семейства характеристик, определяемую уравнениями:

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0,$$

Монж назвал ребром возврата огибающей поверхности, ибо точки этой линии являются, вообще говоря, точками возврата для кривой, по которой пересекается огибающая поверхность с плоскостью, не проходящей через касательную к ребру. В недостаточно отчётливой форме Монж распространил учение о характеристиках и на уравнения высших порядков, возникавшие при изучении различных типов поверхностей — развёртывающихся, линейчатых и др. Он, между прочим, ввёл и употребительные теперь сокращённые обозначения частных производных.

К концу XVIII столетия теория дифференциальных уравнений выросла в одну из важнейших математических дисциплин и стала основным аппаратом математического естествознания. Были выявлены основные классы обыкновенных уравнений, интегрируемых в квадратурах, созданы первые систематические приёмы приближённого решения, введён ряд новых фундаментальных понятий — особого и общего решения, полного, общего и частного интегралов уравнений в частных производных.

Было положено начало геометрической теории уравнений с частными производными, выделены некоторые канонические типы уравнений с частными производными высших порядков. Теория дифференциальных уравнений была связана с вариационным исчислением [1]) и

---

[1]) Особенное значение имело известное уравнение Эйлера

$$F'_y+\frac{dF'_{y'}}{dx}=0,$$

которому должна удовлетворять функция, доставляющая экстремум интегралу $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$, и обобщение этого уравнения на случай экстремума

$$\int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx.$$

дифференциальной геометрией, наметилась её связь с функциями комплексного переменного, с тригонометрическими рядами, со специальными функциями и эллиптическими интегралами. Большая часть результатов, достигнутых к 80-м годам XVIII в., была мастерски изложена в классическом четырёхтомном «Интегральном исчислении» (Спб., 1768—1770, 4-й том — 1794) Эйлера, которое долгое время оставалось настольной книгой всех математиков и не утратило интереса и поныне. Новые идеи в теорию дифференциальных уравнений внесены были в первой половине XIX в., отчасти в связи с разработкой новых проблем математической физики, отчасти в связи с общей реформой математического анализа.

Первая четверть XIX в. явилась переломным периодом в развитии всей математики. Прежде всего коренной перестройке подвергся самый фундамент математического анализа: были точно сформулированы в арифметических терминах понятия предела, бесконечно малой, непрерывности функции, дифференциала и пр.; определённый интеграл, под которым в XVIII в. понимали обычно частное значение одной из первообразных, был определён как предел суммы; при пользовании бесконечными рядами стали требовать от них сходимости и был установлен ряд критериев сходимости и т. д. Теоремам и формулам анализа перестали приписывать, как то было ранее, общую значимость для любых значений аргумента и для любых функций; в формулировках математических предложений появились всем нам теперь привычные ограничительные условия. Само понятие функции впервые приобрело современный характер, и в 1834 г., за три года до П. Лежен-Дирихле (1805—1859), великий русский геометр Н. И. Лобачевский (1792—1856), разъясняя идею функциональной зависимости, писал: «Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни вместе с другими в связи, принимать как бы данными вместе».

В результате этой реформы, главными деятелями которой явились О. Коши (1789—1857), К. Гаусс (1777—1855) и чешский учёный Б. Больцано (1781—1848), математический анализ из учения об отдельных функциях или специальных классах функций начал перерастать в общую теорию функций, что позволило с гораздо большей глубиной и размахом изучать и частные функциональные зависимости. При этом на передний план исследований выдвигается проблема арифметического доказательства существования определяемых с помощью бесконечных процессов объектов анализа: пределов последовательностей, определённного интеграла непрерывной функции (Коши, 1823), первообразной, различных несобственных интегралов, корня непрерывной функции, на концах интервала имеющей разные знаки, и т. д. Там, где учёные XVIII в. опирались на геометрические иллюстрации или физические аналогии (интеграл как площадь или путь, производная как наклон касательной к непрерывной кривой и т. п.), или — как это было в приближённых вычислениях — на «очевидное» из хода выкладок

приближение к искомой величине, математики XIX в. правильно усмотрели принципиальные проблемы существования.

Развитие математического анализа в направлении функций действительных переменных, особенно новое определение интеграла и учение о сходимости рядов, создало предпосылки и для построения общей теории функций комплексного переменного, основателями которой были Коши и Гаусс. Не менее глубокие сдвиги произошли в указанное время и в других областях математики. Так, в алгебре решены были первые общие проблемы, связанные с представлением корней уравнений с помощью радикалов. П. Руффини (1765—1822) и Н. Абель (1802—1829) доказали невозможность решения в радикалах произвольных уравнений выше четвёртой степени. Вслед за тем Э. Галуа (1811—1832) установил условия, при выполнении которых уравнения данной степени разрешимы в радикалах, и в связи с этим заложил основы теории групп, идеи которой некоторое время спустя начали проникать решительно во все разделы математики. П. Ванцель (1814—1848) показал неразрешимость в общем случае с помощью циркуля и линейки античной проблемы трисекции угла и задачи об удвоении куба. Революционный переворот произвёл Н. И. Лобачевский открытием неевклидовой геометрии (1826 и след.). Возникли идеи многомерных геометрий.

Новые идеи и методы математического анализа оказали мощное влияние и на развитие теории дифференциальных уравнений. Здесь также была поставлена общая проблема существования — именно существования решений дифференциальных уравнений. Точная формулировка и первое же решение этой задачи для весьма широкого класса случаев принадлежали Коши.

Коши отмечал, что роль, которую играют интегралы (в том числе дифференциальных уравнений) в физике и геометрии, показывает, что входящие в них произвольные постоянные и функции всегда подлежат определению. Учёные XVIII в. между тем исходили из необоснованной уверенности в существовании общих решений, начинали поэтому с их разыскания, а определение констант и функций производили под конец. Коши счёл необходимым обратить порядок, на первое место поставить разыскание и доказательство существования частных решений, так чтобы определение постоянных или функций не было отделено от нахождения интегралов. «Тогда, — писал он, — каждая задача стала вполне определённой, а это обстоятельство позволило не только упростить уже известные решения задач, но и приступить к решению новых проблем». Так возникли известные «задачи Коши».

В лекциях 1820—1830 гг. Коши дал доказательство существования и единственности решения обыкновенного уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$ в области непрерывности $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ (резюме опубл. в 1835 г.). Он отправлялся от способа приближённого интегрирования Эйлера,

в котором искомая интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), аппроксимируется многоугольником, вершины которого на отрезке (x_0, x) имеют абсциссы $x_0, x_1, \ldots, x_n = x$, а ординаты определяются формулами:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$
$$y_2 = y_0 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

так что

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Аналогия между последним выражением и так называемой интегральной суммой для функции $f(x)$ очевидна. Само доказательство существования сводилось к установлению существования предельной функции $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$, удовлетворяющей как уравнению, так и начальным условиям. Подробнее это доказательство было опубликовано по записям лекций Коши его учеником Ф. Муаньо (1804—1884) в 1844 г. Впоследствии это доказательство было усовершенствовано Р. Липшицем (1832—1903), который заменил требование непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ более широким условием, носящим его имя (1876). Позднее Дж. Пеано (1858—1932) доказал теорему существования по крайней мере одного решения уравнения $y' = f(x, y)$ с условиями $x = x_0$, $y = y_0$ в области непрерывности $f(x, y)$.

Коши принадлежит идея и другого приёма, так называемого метода последовательных приближений, в современной общей форме разработанного в 1890 г. Э. Пикаром (1856—1941) и основанного на доказательстве сходимости приближений, определяемых формулами:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx, \ \ldots, \ y_k = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})\,dx.$$

Доказательство существования Коши распространил и на уравнения высших порядков посредством приведения их к системам уравнений первого порядка. Наконец, Коши дал (при некоторых ограничениях) доказательство существования решения обыкновенного уравнения и системы уравнений в частных производных первого порядка в комплексной области, основанное на представлении решений в форме степенных рядов и применении мажорирующих функций («метод исчисления пределов»).

Проблема существования решения систем уравнений с частными производными была глубоко изучена замечательным русским учёным С. В. Ковалевской (1850—1891), которая доказала основную теорему о существовании единственного аналитического решения для заданной в так называемой нормальной форме системы уравнений с частными

производными (1874). Ковалевская привела и неожиданный для её современников пример уравнения, не удовлетворяющего условиям основной теоремы и не имеющего аналитического решения.

Теоремы существования имели не только принципиальное значение, гарантируя законность применения методов теории дифференциальных уравнений к задачам математического естествознания. Самые приёмы доказательства этих теорем позволяли как приближаться к искомому решению с любой степенью точности, так и производить оценки точности приближений. Таким образом, эти теоремы смогли быть положены в основу различных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые разрабатывались на протяжении всего XIX в.

Более совершенные средства нового математического анализа позволили с большей глубиной развить и теорию особых решений. Муаньо в 1844 г. привёл данный Коши пример обыкновенного уравнения первого порядка, особое решение которого одновременно является и частным, а А. Курно (1801—1874) показал, что дискриминантная кривая дифференциального уравнения может и не быть огибающей семейства интегральных кривых, но представлять собой место их точек возврата (1841). Современная теория особых решений была затем подробно разработана Г. Дарбу (1842—1917; работа 1870 г.), Пикаром (1886—1887), Г. Кристалем (1851—1911; работа 1896 г.) и др.

Серьёзный сдвиг произошёл в первой половине XIX в. и в проблеме интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах. Новых типов обыкновенных уравнений такого рода добавлено было немного. Зато, подобно тому как в алгебре был поставлен вопрос о разрешимости уравнений в радикалах, в теории дифференциальных уравнений был поставлен вопрос о возможности интегрирования в квадратурах. Здесь, правда, не были достигнуты столь широкие результаты, какие были получены в алгебре Абелем и Галуа, но во всяком случае были получены первые результаты в исследовании этой проблемы. Ж. Лиувилль (1809—1882), опираясь на некоторую классификацию трансцендентностей, доказал, что специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах только в тех случаях, которые были найдены ещё Д. Бернулли (1841). К аналогичной области проблем принадлежали классические исследования академика П. Л. Чебышева (1821—1894) об интегрируемости в конечном виде различных видов иррациональных функций, в частности дифференциального бинома (1853 и след.). Проблемой интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений в элементарных трансцендентных функциях или в квадратурах занимались позднее казанский математик В. П. Максимович (1850—1889; работа 1885 г.) и профессор Ростовского университета Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1952; работы 1907—1937 гг.). В результате многочисленных работ было установлено, что дифференциальные уравнения являются, вообще говоря, источником новых трансцендентностей, не выразимых в квад-

ратурах элементарных функций, и что сводимость к квадратурам — явление крайне редкое.

Впрочем, к интегрируемым в элементарных функциях или квадратурах уравнениям и в XIX в. были добавлены некоторые новые, среди которых следует отметить уравнение К. Якоби (1804—1851; работа 1842 г.):

$$(Ax+By+C)\,dx+(A_1x+B_1y+C_1)\,dy+$$
$$+(A_2x+B_2y+C_2)(x\,dy-y\,dx)=0,$$

оригинальный приём решения которого дал впоследствии московский профессор и почётный академик Д. Ф. Егоров (1869—1931). Уравнение Якоби есть частный вид уравнения Дарбу (1878):

$$L\,dx+M\,dy+N(x\,dy-y\,dx)=0,$$

где L, M, N суть целые многочлены. Зная некоторое число частных алгебраических интегралов уравнения Дарбу $\left(\geqslant\frac{m(m+1)}{2}+2,\right.$ если высшая степень многочленов есть $\left.m\right)$, общее решение можно получить без квадратур, а интегрирующий множитель можно составить с помощью $\frac{m(m+1)}{2}+1$ частных интегралов. Ещё до Дарбу (1862) проблемой составления интегрирующего множителя по нескольким частным решениям занимался профессор Юрьевского (Тартуского) университета Ф. Г. Миндинг (1806—1885), в работе которого был решён таким путём ряд отдельных задач. Труд Миндинга академик М. В. Остроградский охарактеризовал как «самый важный шаг», сделанный в этой области после Эйлера, и метод Дарбу (разработанный последним в более общем виде) следует называть по справедливости методом Миндинга-Дарбу.

В этом же направлении работали профессор Петербургского университета А. Н. Коркин (1837—1908; работа 1897 г.) и отчасти киевский профессор В. П. Ермаков (1845—1922).

Ряд новых результатов был получен и в теории линейных дифференциальных уравнений. Академик М. В. Остроградский (1801—1861) одновременно с Лиувиллем (1838) получил важную формулу:

$$W(x)=\text{const}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p_1(x)\,dx},$$

несправедливо именуемую обычно только по фамилии французского учёного. В это же время Ж. Штурм (1803—1855), которому принадлежит известная теорема алгебры, в связи с исследованиями по теплопроводности ввёл понятие о колеблющихся решениях и доказал теорему о взаимном чередовании нулей двух линейно независимых решений линейного однородного уравнения второго порядка (1837).

Работы Штурма и Лиувилля положили начало исследованиям по теории краевой задачи, носящей их имена и состоящей в решении уравнения

$$y''(x)+p(x)y'(x)+\lambda y(x)=0$$

при заданных значениях некоторой линейной комбинации $y(x)$ и $y'(x)$ в двух точках оси x. Решение этой краевой задачи теснейшим образом связано с теорией интегральных уравнений, а также с теорией разложения функций по фундаментальным функциям.

Большое число исследований было посвящено и специальным линейным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами — уравнению Ф. В. Бесселя (1784—1846), которым, как мы видели, занимались ещё Д. Бернулли и Эйлер, уравнению гипергеометрического ряда:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{dy}{dx}-abx=0,$$

которое изучал после Эйлера (1778, опубл. в 1801 г.) Гаусс (1812), уравнениям А. Лежандра (1752—1833), Г. Ламэ (1795—1870) и др. Профессор Московского высшего технического училища А. В. Летников (1837—1888) применил к интегрированию подобного рода уравнений, в частности к уравнению

$$(x-a)(x-b)y''+(c+hx)y'+ky=0,$$

разработанную им теорию производных произвольных порядков (1876 и след.). Изучение таких специальных уравнений, имеющих весьма широкие приложения в математическом естествознании, содействовало развитию теории специальных функций — цилиндрических, шаровых и т. д. В теории цилиндрических функций особенное значение имели многосторонние и обобщающие исследования академика Н. Я. Сонина (1849—1915). Упомянем ещё исследования Лиувилля по разысканию рациональных дробных решений линейных уравнений с целыми рациональными коэффициентами, продолженные академиком В. Г. Имшенецким (1837—1892). Мы не можем останавливаться на новой теории линейных дифференциальных уравнений Л. Фукса (1833—1902), в которой эти уравнения рассматриваются в комплексной области.

Из открытий в теории уравнений с частными производными первого порядка наиболее ранними в XIX в. явились результаты И. Ф. Пфаффа (1765—1825), который в 1814 г. подверг более глубокому исследованию линейное уравнение в дифференциалах

$$F_1\,dx_1+F_2\,dx_2+\ldots+F_n\,dx_n=0,$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ суть данные функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и поставил задачу об интегрировании его с помощью возможно меньшего числа соотношений — задачу, которую Якоби назвал «проблемой Пфаффа» и которой впоследствии успешно занимались многие математики, в частности Э. Гурса (1858—1936). Большое значение имели

разработанные Якоби в связи с работами по механике методы интегрирования нелинейного уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. Так называемый второй метод Якоби был детально изложен в его посмертном труде по механике (1866). Но ещё за два года до того этот метод был оригинально переработан и упрощён в магистерской диссертации В. Г. Имшенецкого (1864). Другой широко распространённый метод характеристик был разработан Коши (1819 и след.). В России этим и родственным вопросам были посвящены работа В. Г. Имшенецкого по уравнениям второго порядка (1868), вскоре переведённая, как и первая его книга, на французский язык, работа Н. Я. Сонина (1874), переведённая на немецкий, а также исследования по теории характеристик для произвольных уравнений n-го порядка московского профессора А. Ю. Давидова (1823—1885; работа 1865 г.) и выдающегося геометра К. М. Петерсона (1828—1881; работа 1876 г.), докторская диссертация Д. Ф. Егорова по уравнениям второго порядка (1898), ряд трудов харьковского профессора, позднее действительного члена Академии наук УССР Д. М. Синцова (1867—1946) и др.

В теории уравнений с частными производными высших порядков, развивавшейся попрежнему в теснейшей связи с задачами математической физики и теории упругости и все шире применявшей аппараты теории тригонометрических рядов, теории функций комплексного переменного и вариационного исчисления, первая половина XIX в. принесла много важных частных достижений в решении различных краевых задач. Отправным пунктом многих исследований явилась классическая работа Ж. Б. Фурье (1768—1830) по теории теплопроводности (1822). Для интегрирования уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

в различных граничных условиях Фурье впервые систематически представлял искомое решение в форме тригонометрического ряда. При этом он заново вывел найденные ещё Эйлером (опубл. в 1798 г.) формулы коэффициентов такого ряда и показал, что функции весьма широкого класса, в том числе определяемые на разных участках различными аналитическими выражениями, т. е. по Эйлеру «разрывные», могут быть представлены на произвольном конечном интервале тригонометрическим рядом, т. е. аналитически. Тем самым была показана неправомерность эйлерова понимания «непрерывности» функции действительного аргумента и в значительной мере оправдана точка зрения Д. Бернулли. Вместе с тем, однако, подтверждено было оспоренное Даламбером мнение Эйлера, что интегралы уравнений с частными производными могут представляться функциями, выражающими сплошные кривые, начертанные вольным движением руки: такие функции на любом конечном участке представимы тригонометрическим рядом. Работа Фурье, о которой он докладывал ещё в 1807 г., сыграла

немалую роль в развитии проблем нового обоснования анализа. Публикация её немедленно поставила вопрос о точных условиях представимости функции тригонометрическим рядом, который сам Фурье исследовал весьма неполно. Первые достаточные условия разложимости функции в такой ряд были в различном виде впервые строго установлены Дирихле (1829) и Н. И. Лобачевским (1834). Известно, какое значение имела разработка теории тригонометрических рядов в создании и развитии теории функций действительного переменного, в частности общей теории интеграла, и теории множеств.

Отдельные типы линейных уравнений математической физики успешно разрабатывали и другие учёные, как С. Пуассон (1781—1840), однако контуры общей теории стали складываться позднее. Достижения в области теории уравнений с частными производными первого и второго порядков, имевшиеся к началу 30-х годов, были весьма обстоятельно изложены профессором Московского университета Н. Е. Зерновым (1804—1862) в его докторской диссертации — первой математической диссертации, защищённой на эту степень в Москве (1837). Выдающиеся исследования различных проблем математической физики проводил в этот период М. В. Остроградский (1828 и след.). В частности, в работах по теории теплопроводности Остроградский продвинулся значительно далее Фурье и Пуассона, допустивших ошибки в случае распространения тепла в жидкости, и развил идеи метода, получившего позднее широкое распространение. Исследования Остроградского по математической физике открывают целую серию работ русских учёных XIX и начала XX вв. в этой области, из которых особенно замечательны труды академика А. М. Ляпунова (1857—1918) по теории потенциала и его ученика академика В. А. Стеклова (1864—1926), по электростатике и гидродинамике, а также по теории теплопроводности, где он применил носящий его имя метод замкнутости.

В развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений во второй половине XIX и начале XX вв. особого внимания заслуживают два новых направления. Одно из них связано было с распространением понятий теории групп, другое — с изучением некоторых задач небесной механики и астрономии.

Идеи теории групп, блестяще оправдавшие себя сначала в алгебре, в 70-е годы проникли и в другие области математики. Так, Ф. Клейн (1849—1925) в 1872 г. показал, что характер геометрии того или иного вида — метрической, проективной и т. д. — определяется свойствами группы взаимно однозначных преобразований множества пространственных элементов на самого себя и инвариантами этой группы. При этом Клейн опирался на понятие непрерывной группы преобразований, преобразования которой определяются с помощью непрерывных функций. Такие преобразования были незадолго перед тем введены Софусом Ли (1842—1899), который и применил их в целом ряде работ по теории дифференциальных уравнений, начиная с 1873 г.

Исследования Ли охватили широкий круг проблем этой теории. Одной из целей Ли являлось установление единства в разнообразных и даже как будто случайных приёмах приведения различных типов обыкновенных уравнений к формам, интегрируемым в квадратурах. Преобразования переменных x, y, определяемые равенствами

$$x' = f_1(x, y, a), \quad y' = f_2(x, y, a),$$

образуют непрерывную группу с одним параметром, если функции f_1 и f_2 непрерывны и последовательное выполнение двух таких преобразований равносильно одному преобразованию такого же вида. Если дифференциальное уравнение при замене переменных по указанным формулам остаётся неизменным для любых значений параметра a, то говорят, что оно допускает соответствующую группу преобразований. Каждой непрерывной группе преобразований с одним параметром и обратными преобразованиями соответствует некоторое так называемое бесконечно малое преобразование, и обратно, всякое бесконечно малое преобразование определяет некоторую однопараметрическую группу. Ли показал, что если обыкновенное уравнение первого порядка допускает группу преобразований, определяемую некоторым бесконечно малым преобразованием, то оно интегрируется в квадратурах, и рассмотрел ряд типов уравнений с заданными преобразованиями. В итоге Ли получил возможность классифицировать дифференциальные уравнения в зависимости от соответствующих бесконечно малых преобразований. Исследования С. Ли по группам преобразований были продолжены в последние десятилетия XIX и в XX вв. в различных направлениях, главным образом в алгебре и топологии.

Другим важнейшим событием в истории дифференциальных уравнений в рассматриваемое время явилось создание качественной теории. К 70-м годам XIX в. проблема интегрирования обыкновенных уравнений в квадратурах элементарных функций утратила прежнее значение; работы С. Ли в известном смысле завершали этот формальный цикл исследований. Поскольку такие решения существуют лишь для весьма небольшого круга уравнений, построение достаточно общей теории в этом направлении оказывалось невозможным. Не открывали пути к общей теории и основанные на теоремах существования приёмы численного решения уравнений. При всей своей важности эти приёмы дают в каждой задаче только одно частное решение, отвечающее на данном, хотя бы большом, но конечном интервале выбранным начальным условиям, и не раскрывают общей картины поведения интегральных кривых в целом. Между тем в различных областях небесной механики возникали проблемы, которые требовали изучения природы функций, определяемых дифференциальными уравнениями, во всей области существования. Ещё к Ньютону и Лапласу восходил, например, вопрос об устойчивости солнечной системы или в частном случае о движении трёх тел, подчинённых

законам механики. Старые методы принципиально не позволяли ответить на вопрос о поведении такой системы в течение сколь угодно больших отрезков времени, — скажем, на вопрос о том, будут ли взаимные расстояния тел оставаться всегда ограниченными или же некоторые из членов системы в конце концов неограниченно сближаются, или удаляются в бесконечность.

Качественная теория дифференциальных уравнений была одновременно создана А. Пуанкаре (1854—1912) и А. М. Ляпуновым. Задача, поставленная Пуанкаре, состояла в том, чтобы, не интегрируя дифференциальное уравнение, исследовать поведение семейства интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$ или системы $\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$ на всей плоскости только по свойствам функций, стоящих в правой части. В серии работ, начатых в 1878 г., Пуанкаре значительно продвинул вперёд решение проблемы. Он дал классификацию и показал значение особых точек интегральных прямых, исследовал поведение последних в окрестности особых точек, ввёл понятие предельного цикла (замкнутой интегральной кривой, к которой приближаются по спиралям достаточно близкие интегральные кривые). Он изучил также ход интегральных кривых на торе. Исследования эти имели по существу топологический характер, и отчасти с ними были связаны и быстрое возрастание интереса к топологии, и её успехи. Эти работы были непосредственно продолжены на основе теоретико-множественных рассмотрений И. Бендиксоном (1901), обнаружившим новые типы особых точек. В дальнейшем Пуанкаре параллельно с Ляпуновым занимался и общей проблемой устойчивости.

Изыскания другого творца качественных методов, великого русского математика А. М. Ляпунова, первоначально также были связаны с конкретной задачей астрономии, — именно, с поставленной перед ним П. Л. Чебышевым задачей о возможности существования фигур равновесия вращающейся жидкой массы, отличных от известной уже ранее фигуры равновесия эллипсоида.

Изучение этой задачи Ляпунов начал в 1882 г., но полное её решение дал в ряде работ 1903—1918 гг. От задачи о фигурах равновесия вращающейся жидкости Ляпунов перешёл к другой проблеме — об устойчивости равновесия и движения механической системы, определяемой конечным числом параметров. Этой проблеме он посвятил свою знаменитую докторскую диссертацию 1892 г. и несколько последующих работ. Ляпунов рассматривал систему n обыкновенных линейных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{A}$$

где X_k разложимы при достаточно малых x_k в сходящиеся ряды по целым степеням x_k и обращаются в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; коэффициенты при этом либо постоянны, либо зависят от t. Система

имеет, очевидно, нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Это решение называется устойчивым (в смысле Ляпунова), если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если начальные значения $x_k(t)$ по абсолютной величине не более δ, то при всяком положительном t будет $|x_k(t)| < \varepsilon$.

Ляпунов точно выяснил, в каких случаях вопрос об устойчивости может быть решён по первому приближению, т. е. путём исследования системы, в которой функции X_k заменяются одними членами разложения первой степени относительно x_k. До Ляпунова математики изучали только такие первые приближения, и это нередко приводило к неверным заключениям. Он решил вопрос об устойчивости и в ряде «сомнительных» случаев, в которых первого приближения недостаточно для суждения об устойчивости системы (A), а также целый ряд важных задач теории линейных и нелинейных обыкновенных уравнений. Изучение системы (A) проводилось при этом качественными методами, т. е. без её непосредственного интегрирования.

Труды Ляпунова по устойчивости имели огромное значение для всего последующего развития теории дифференциальных уравнений и её приложений к изучению колебаний различных физических и механических систем.

Общая качественная теория так называемых динамических систем разрабатывалась затем рядом авторов, в частности с 1912 г. Дж. Биркгофом (1884—1944). Основными задачами теории являлись, с одной стороны, изучение решений во всей области существования, а с другой — вблизи особых точек.

Из дореволюционных работ отметим ещё ценные исследования С. Н. Бернштейна о существовании и аналитичности решений широкого класса уравнений с частными производными эллиптического типа (1904 и след.).

Мы видели, сколь значительны были достижения отечественных математиков — Эйлера, Остроградского, Миндинга, Давидова, Имшенецкого, Сонина, Ковалевской, Ляпунова, Стеклова и др. — в развитии теории дифференциальных уравнений на протяжении XVIII и XIX вв. Новый бурный расцвет теория дифференциальных уравнений в нашей стране испытала после Великой Октябрьской социалистической революции. Достижения советских математиков в самых разнообразных областях этой теории к настоящему времени настолько велики, что мы здесь сможем указать только на направления исследований, тем более, что по характеру своему они далеко выходят за пределы настоящего курса.

Развитие теории дифференциальных уравнений в Советском Союзе определялось как глубокими связями исследований с проблемами математического естествознания и техники (задачи аэро- и гидродинамики, теории упругости, сейсмологии и пр.), на новом идейном уровне продолжавшими славные традиции петербургской школы, так и применением методов теории функций действительного переменного,

топологии и функционального анализа, с особенным блеском развивавшихся уже в советский период в школе московских математиков. Тесная связь с практикой особенно усилилась в последнее пятнадцатилетие благодаря всё более планомерной постановке проблем, актуальных для социалистического строительства.

В общей теории интегральных кривых, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, П. С. Александров и В. В. Немыцкий дали новое доказательство теоремы Пеано.

А. М. Лаврентьев построил пример уравнения первого порядка, на правую часть которого наложено в некоторой области одно лишь условие непрерывности и для которого ни одна точка области не является точкой единственности решения. А. Н. Тихонов предложил новый приём последовательных приближений, нашедший широкое применение в доказательствах теорем существования.

И. Г. Петровский исследовал поведение около особых точек интегральных кривых некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений. А. А. Андронов (1901 — 1952) и его ученики разрабатывали в г. Горьком математические задачи автоколебаний различных физических систем, относящиеся к качественной теории уравнений, в частности к теории предельных циклов.

Изучение проблем устойчивости по Ляпунову велось далее как в Москве (Н. Д. Моисеев), так и, особенно, в Казани, К. П. Персидским, И. Г. Малкиным, Н. Г. Четаевым и Г. В. Каменковым.

Общая теория динамических систем явилась предметом дальнейших изысканий москвичей А. Я. Хинчина, В. В. Степанова, А. Н. Тихонова, В. В. Немыцкого и ленинградца А. А. Маркова. Новые идеи в этой области были выдвинуты также в Киеве Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.

Краевые задачи линейных дифференциальных уравнений разрабатывал в Одессе М. Г. Крейн.

Ленинградский учёный И. А. Лаппо-Данилевский (1896—1931) применил к системам дифференциальных уравнений аппарат созданной им теории аналитических функций от матриц.

Теорией дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в которых искомая функция и её производные входят как с аргументом t, так и с аргументом $t-\tau$ (τ — постоянное или переменное «запаздывание»), занимался А. Д. Мышкис.

Весьма важные результаты были получены и в теории уравнений в частных производных, особенно глубоко связанной с математическим естествознанием.

Значительные работы в этой области принадлежат также Н. М. Гюнтеру (1871—1941), В. И. Смирнову, М. А. Лаврентьеву, А. Н. Тихонову и грузинским математикам Н. И. Мусхелишвили и И. Н. Векуа.

Ряд новых задач математической физики и сейсмологии был решён С. Л. Соболевым, создавшим новые сильные методы. Весьма

значительные результаты в общей теории систем дифференциальных уравнений получил И. Г. Петровский, который впервые выделил и охарактеризовал классы систем гиперболического, параболического и эллиптического типов, аналогичные по свойствам задач и решений одноимённым классическим уравнениям.

Приближённые методы издавна привлекали внимание русских учёных — Эйлера, Лобачевского (алгебраические уравнения) и, особенно, Чебышева и его учеников. Оригинальное изложение приёмов численного интегрирования дифференциальных уравнений, разработанных в XIX в., дал в 1917—1918 гг. акад. А. Н. Крылов (1863—1945). В советское время и этот столь важный для практических приложений раздел этой теории был обогащён рядом крупных открытий. Прежде всего отметим вариационные методы, частью развившие метод академика Б. Г. Галеркина (1871—1945; работа 1915 г.) для уравнений с частными производными (М. В. Келдыш, Д. Ю. Панов и др.), частью — новые (Н. М. Крылов, Л. В. Канторович). Ряд новых приёмов был получен и с помощью замены дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях, которой по существу пользовался ещё Эйлер (Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, С. А. Гершгорин, Д. Ю. Панов, Ш. Е. Микеладзе и др.). Новый важный метод численного интегрирования обыкновенного уравнения $y' = f(x, y)$ с помощью построения двух функций, приближающих решение снизу и сверху, был предложен академиком С. А. Чаплыгиным (1869—1942); сходимость приближений исследовал академик Н. Н. Лузин (1883—1950). Наконец, в последние годы получили развитие теория и конструирование различных машин для интегрирования дифференциальных уравнений, которым, несомненно, принадлежит широкое будущее (И. С. Брук, Л. И. Гутенмахер, Л. А. Люстерник и др.).

Этот краткий перечень, разумеется, не может дать представления о всём богатстве содержания работ советских математиков в различных областях теории дифференциальных уравнений. Но и он показывает всю широту размаха научного творчества советских учёных в этой области, оригинальность их проблематики и значение их открытий как для науки, так и для её практических приложений.

ОТВЕТЫ.

1. $y = 1000 - 490{,}5\,t^2$; 1,43 сек. **2.** $y = y_0 + 100\,t - 490{,}5\,t^2$; 0,1 сек. **3.** $y = 2x + C$; $y = -\frac{x^4}{4} + C$; $y = -\sin x + C_1 x + C_2$. **5.** $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; $y = kx + b$. **6.** $xyy'^2 + y'(x^2 - y^2 - c^2) - xy = 0$. **7.** $3y^{IV}y'' - 4y'''^2 = 0$. Кривые: при $a_{12} \neq 0$ гиперболы с вертикальной асимптотой, при $a_{12} = 0$ — параболы. **8.** $3y^{IV}y'' - 5y'''^2 = 0$; $y''' = 0$. **9.** Дифференциальное уравнение: $\pi(200\,h - h^2)\,dh = -0{,}6\sqrt{2g}h^{1/2}\,dt$; приблизительно 18,4 мин. **10.** Приблизительно 15 мин. 20 сек. **11.** $R = R_0 e^{-0{,}000433\,t}$; время в годах. **12.** $y = K(x - x_0)^{\frac{1}{n-1}}$; K — определённое постоянное; x_0 — точка пересечения с осью x-ов (произвольное постоянное). **13.** $x = a\ln\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right) + \sqrt{a^2 - y^2} + C$. Трактриса. **14.** $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Круги с центрами на оси Ox. **15.** $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{2} + 1$. **16.** $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C$. **17.** $\arcsin x + \arcsin y = C$. **18.** $x^2 - y^2 = Cy$. **19.** $y = xe^{Cx}$. **20.** $e^{\frac{y}{x}} = Cy$. **21.** $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ или в полярных координатах $r = Ce^{-\varphi}$. Логарифмические спирали. **22.** $\sin\frac{y}{x} = \ln x + C$.

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - my}{mx + y}$; $m = \operatorname{tg}\alpha$. **24.** Уравнение: $y' = \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}$, решение $y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$; параболы с фокусом вначале. **25.** $\lambda(a\lambda + b)z + b(c_1 - \lambda c)\ln[(a\lambda + b)z + ac_1 + bc] = (a\lambda + b)^2(x + c)$. **26.** $(y + x - 1)^5(y - x + 1)^2 = C$. **27.** $e^{10y - 20x} = C(5x + 10y + 7)^2$. **28.** $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2)$.

29. $x = -y + a\operatorname{tg}\frac{y + C}{a}$. **30.** $y = e^{-\int P\,dx}\left[C - (n-1)\int Qe^{-(n-1)\int P\,dx}\,dx\right]^{-\frac{1}{n-1}}$.

31. $i = Ce^{-\frac{R}{L}t} + LE_0\sin(\omega t - \delta)$: $(R^2 + \omega^2L^2)^{-1/2}$; $\operatorname{tg}\delta = \frac{L\omega}{R}$. **32.** $y = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2\cos x}$. **33.** $y = Ce^{-\varphi(x)} + \varphi(x) - 1$. **34.** $y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2$. **35.** $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\left(C + \ln\frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$. **36.** $x = y^2 + Cy^2e^{\frac{1}{y}}$. **37.** $\frac{1}{y} = x\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)$. **38.** $y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}$. **39.** $\frac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2$.

40. $y^2=-x\ln x+Cx$. **41.** $y=\dfrac{-Cx^{2/3}+2x}{Cx^{5/3}-x^2}$. **42.** $y=\dfrac{2x^4-2C}{x^5+Cx}$. **43.** Частное решение $y=2x$. **44.** $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{x}+C\right)}{x^2}-\dfrac{1}{x}$. **45.** $\dfrac{df}{dx}=C(1+f^2)$; $f=\operatorname{tg}Cx$. **46.** $\operatorname{arctg}y+C=\dfrac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+y^2}+y-x}{xy+1}$. **47.** $(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2$. **48.** $y^4+2xy^2-x^2=C$. **49.** $(x+y)^2+a^2+b^2=C(b^2x-a^2y)^2$. **50.** $y(x)=\dfrac{e^{kx}}{e^{-k\omega}-1}\int\limits_x^{x+\omega}e^{-kt}f(t)\,dt$. *Указание.* Написать общее решение и проверить, что при надлежащем выборе постоянной $y(x+\omega)-y(x)\equiv 0$. **52.** $\sqrt{1+x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C$. **53.** $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$. **54.** $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=C$. **55.** $\dfrac{xy}{x-y}+\ln\dfrac{x}{y}=C$. **56.** $\mu=\dfrac{1}{x^2y}$; $2\ln y-\dfrac{y^2}{x}=C$. **57.** $x^2y+\dfrac{1}{y}=C$. *Указание.* Найти общее выражение интегрирующего множителя для $x^2y^2\,dy+2xy^3\,dx$ и подобрать произвольную функцию так, чтобы он не зависел от x. **58.** $\dfrac{1}{k}x^{bk}y^{ak}+\dfrac{1}{l}x^{\beta l}y^{\alpha l}=C$, где k и l — корни уравнений $ak-\alpha l=-m$, $bk-\beta l=-n$ в случае $a\beta-b\alpha\neq 0$; если $a\beta-b\alpha=0$, то интеграл будет $x^by^a=C$. *Указание.* Общее выражение интегрирующего множителя первых двух членов есть $\dfrac{1}{xy}\varphi(x^by^a)$; для последних $\dfrac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(x^\beta y^\alpha)$; подбираем φ и ψ как степени аргументов, чтобы оба множителя оказались равными. **59.** $x^2-\dfrac{x}{y}+y+\ln y=C$. **60.** $\mu=e^{-x^2}$. **61.** $\mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$. **62.** $\mu=y^{-n}e^{-(n-1)\int P\,dx}$. **63.** $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, общее решение $\dfrac{x^3+xy+y^3}{x+y}=C$. **64.** $f(x,y)=\dfrac{\varphi(x)+\psi(x)\chi(y)}{\chi'(y)}$; φ, ψ, χ — произвольные функции. **65.** $y=x+C$; $y=\sqrt{C^2-x^2}$. **66.** $y=x\operatorname{sh}(x+C)$. *Указание.* Разрешив уравнение относительно p, положить $\dfrac{y}{x}=u$. **67.** $y=\dfrac{1}{3}x^3+C$; $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$; $y=\dfrac{1}{C-x}$. **68.** $(y-C)^2=4xC$. **69.** $x=t^3+t^2$; $y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+C$. **70.** $x=\dfrac{1}{t}-t^2$, $y=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2t^5}{5}+C$. **71.** $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $x=-t+\ln\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}}+\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$. **72.** $y=e^pp^2$; $x=e^p(p+1)+C$. **73.** $y=x-C-\dfrac{1}{x-C}$ ($y_0=0$ представляет место точек прикосновения, особого решения нет). **74.** $y=a(1+\cos 2\varphi)$, $x=a(-2\varphi-\sin 2\varphi)+C$ (циклоиды). **75.** $y=C^2(x-C)^2$; особые решения $y=0$, $y=\dfrac{x^4}{16}$. **76.** $y=-\dfrac{x^2}{4}+Cx+C^2$, особое решение $y=\dfrac{-x^2}{2}$. **77.** $k\neq 1$, $x^2+y^2=\dfrac{2Cx+C^2}{k^2-1}$; $k=1$, $x^2+y^2=Cx$ (удобно ввести полярные координаты). **78.** $y=\dfrac{C+a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}-ap$. **79.** $x=-p-\dfrac{1}{2}+\dfrac{C}{(1-p)^2}$.

80. Особое решение $y=\frac{(x+1)^2}{4}$. **81.** Особое решение $y^4=-\frac{32x^3}{27}$. **82.** Особое решение $x^2+y^2=1$. **83.** $x=\frac{C}{\sqrt{p}}-\frac{p}{3}$. **84.** Дифференциальное уравнение $y=px+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, кривая — астроида. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$. **85.** $y=x$ не есть решение. **86.** $y=x$ есть особое решение. **87.** $y=0$ есть особое решение. **88.** Выполнена единственность, $y=0$ есть обыкновенное решение. **89.** $y=0$ есть особое решение. **90.** Общее решение $y=Cx+\frac{C^2}{2}$, особое $y=-\frac{x^2}{2}$. **91.** $y=\pm 2x$. **92.** Огибающая $y=-x$; $x=0$. **93.** См. задачу 73. **94.** См. задачу 75. **95.** Общее решение $2Cy=(x+C)^2$, особые решения $y=0$; $y=2x$. **96.** $y=\frac{x^2}{4}$. **97.** См. задачу 76. **98.** $y=2e^{\frac{x}{2}}$, $y=Ce^x+\frac{1}{C}$. **99.** $\frac{x^2}{2C^2}+\frac{y^2}{C^2}=1$. **100.** $r=Ce^{k\varphi}$. **101.** $y=C\,|\,x\,|^n$. **102.** $(x^2+y^2)^2-2Cxy=0$; лемнискаты повёрнуты на $\frac{\pi}{4}$. **103.** $\rho=a[1+\cos(\theta-2a)]$. **104.** То же семейство кривых линий. **105.** $\rho^2=c\sin 2\theta$. **106.** $x=\sin\varphi$, $y=-\frac{1}{8}\varphi\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\varphi+C_2\sin\varphi+\frac{7}{48}\sin 2\varphi-\frac{C_1}{4}\cos 2\varphi-\frac{1}{192}\sin 4\varphi+C_3$. **107.** $x+C_2=\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{3/2}-2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{1/2}$. **108.** $y=\frac{1}{6a^3C^5}[C^4(x+C_1)^2-a^6]^{3/2}-\frac{a^3}{2C^3}(x+C_1)\ln[C^2(x+C_1)+\sqrt{C^4(x+C_1)^2-a^6}]+\frac{a^3}{2C^5}\sqrt{C^4(x+C_1)^2-a^6}+C_2x+C_3$. **109.** $y=\operatorname{sh}(x+C_1)+C_2x+C_3$. **110.** $x=\frac{y_0}{4}\left\{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2-1-2\ln\frac{y}{y_0}\right\}+x_0$. **111.** $y=2a+C_1(1-\cos\varphi)$, $x=C_1(\varphi-\sin\varphi)+C_2$. Семейство циклоид. **112.** $y=\frac{C_1x^3}{6}-\frac{C_1^3x^3}{2}+C_2x+C_3$. **113.** $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **114.** $y=C_1e^{C_2x}$. **115.** $y=C_1\sqrt{x^2+C_2}$. **116.** $y=nx\ln\frac{C_1x}{1+C_2x}$. **117.** $c'x^{c^3}=\frac{c\sqrt{y}+\sqrt{cy-2x}}{c\sqrt{y}-\sqrt{cy-2x}}-e^{\frac{2c\sqrt{y}\sqrt{cy-2x}}{(c^2-c)y+2x}}$. **118.** $c'x^{c^3}=\frac{c\sqrt{y}+\sqrt{cy-2x^2}}{c\sqrt{y}-\sqrt{cy+2x^2}}\times e^{\frac{2c\sqrt{y}\sqrt{cy+2x^2}}{(c^2-c)y-2x^2}}$. **119.** $y'^2-x^2y^2=C$. **120.** $y=\frac{(x^2+C_1)^{3/2}}{3x^2}+\frac{C_2}{x^2}$. **121.** $x^2y^3+2xy+x^2=C_1x+C_2$. **122.** $x=C_1\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\right)+C_2$, $y=C_1\sin\varphi$. Семейство трактрис. **123.** $y=C_2+\frac{1}{2}\int\left[e^{\frac{x^2}{a^2}+C_1}-e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+C_1\right)}\right]dx$.

124. $y=C_1x\sqrt{x^2+C_2}$. **125.** $\ln y=1-\frac{1}{Cx+C'}$. **126.** $y=C_1x+C_2+\sqrt{C_3x+C_4}$; $y=ax^2+bx+c$. **129.** $x=-\frac{2t}{3}+\frac{C_1}{t^2}$; $y=\frac{2}{27}t^3-\frac{2C_1}{3}\ln t+\frac{4C_1^2}{3t^3}+C_2$. **130.** $x=\frac{C_1}{t^2}+\frac{2}{5}t^3$; $y=-\frac{4C_1^2}{t}-\frac{7}{10}t^4+\frac{2}{75}t^3+C_2$. **131.** $y''+y=0$. **132.** $y''-2\operatorname{ctg}2xy'=0$; интервалы $k\frac{\pi}{2}<x<(k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. **133.** $W(x)=\frac{C}{1-x^2}$. **134.** $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. **135.** $y=C_2+(C_1-C_2x)\operatorname{ctg}x$. **136.** $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. **137.** $y=C_1x+C_2\sin x+C_3\cos x$. **138.** $y=C_1+C_2x^2+C_3(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})$ **139.** $y=C_1x+C_2x^2+x^3$. **140.** $y=C_1e^x+C_2x-(x^2+1)$. **141.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x^2+x^3$. **142.** $y=\ln x\left(C_1+C_2\int\frac{dx}{\ln^2 x}+e^x\right)$. **143.** Соотношение $\frac{dp_2}{dx}=-2p_1p_2$; y_1 найдётся из соотношения $\frac{y_1'^2}{y_1^2}=-p_2$. **144.** $v=\frac{y_1y''W[y_1, y_2]y'W'[y_1, y_2]+y(y_1'y_2''-y_1''y_2')}{(W[y_1, y_2])^2}$. **145.** $y=C_1e^{-2x}+C_2(4x^2+1)$. **146.** Частные решения: $y_1=\frac{1}{\sin x}$, $y_2=\operatorname{ctg}x$. **147.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{2}}+C_4e^{-x\sqrt{2}}$. **148.** $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$. **149.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. **150.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **151.** $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}$. **152.** $y=e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\}$. **153.** $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$. **154.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{3}e^x-\frac{x}{2}e^{2x}$. **155.** $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\ln x+e^x\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)$. **156.** $y=e^x\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5\right)$. **157.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x^2}{8}\cos 2x+\frac{x}{16}\sin 2x$. **158.** $y=e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(C_1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]$. **159.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arctg}e^x$. **160.** $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}$. **161.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{4}x\sin x$. **162.** Ряд Фурье для правой части: $-\sum^{\infty}\frac{\cos mx}{m}$; при $m=3$ имеем резонанс. Общее решение уравнения: $y=\left(C_1-\frac{1}{18}x\right)\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{1}{8}\cos x-\frac{1}{10}\cos 2x+$

$+\sum_{m=4}^{\infty}\frac{1}{m(m^2-9)}\cos mx$. **163.** $R=C_1r^n+C_2r^{-(n+1)}$. **164.** $y=C_1x^2+C_2x^3-\frac{1}{2}x$. **165.** $y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)-x\ln x$. **166.** $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^2+\frac{1}{3}\left\{\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\ln x-\frac{1}{3x}-\frac{x^2}{3}\right\}$. **167.** $y=x(C_1+C_2\ln x)+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x(\ln x)^2$. **168.** $y=C_1\cos\ln(1+x)+[C_2+2\ln(1+x)]\sin\ln(1+x)$.

169. $y=xz$. **170.** Подстановка $y=x^{-p+\frac{1}{2}}z$, $n=p-\frac{1}{2}$. **171.** $y=C_1e^{\frac{x^2}{2}}+C_2e^{-\frac{x^2}{2}}$. **172.** $y=e^{x^2}(C_1\cos x+C_2\sin x+\sin 2x)$. **173.** $y=e^{\sqrt{x}}\left(C_1x^2+\frac{C_2}{x}\right)$. **174.** $y_1=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots$; $y_2=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}+\ldots$ Легко видеть, что $y_1=e^{-\frac{x^2}{2}}$; y_2 получаем квадратурами. **175.** $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+C_3\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$; $y=C_1e^t+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left[(-C_2+C_3\sqrt{3})\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+(-C_3-C_2\sqrt{3})\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right]$; $z=C_1e^t+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left[(-C_2-C_3\sqrt{3})\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+(C_2\sqrt{3}-C_3)\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right]$. **176.** $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}$; $z=-C_1+C_2e^{2x}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$. **177.** $y=\frac{1}{(C_1x+C_2)^2}$; $z=-\frac{1}{2C_1(C_1x+C_2)}$. **178.** $y=x+C_2e^{C_1x}$; $z=-\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$. **179.** $y_3=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$; $z_3=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}$. **180.** $y_3=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}$. **181.** $y_4=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{120}$. **182.** $y=\sqrt{C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}}$, $z=\sqrt{C_1e^{2x}-C_2e^{-2x}}$. **183.** $y=\frac{1}{C_1e^x+C_2e^{-x}}$, $z=\frac{1}{-C_1e^x+C_2e^{-x}}$.

184. $x=C_1e^t+C_2e^{-2t}$, $y=C_1e^t+C_3e^{-2t}$, $z=C_1e^t-(C_2+C_3)e^{-2t}$. **185.** $x=e^{-t}(C_1t^2+C_2t+C_3)+t^2-3t+3$; $y=e^{-t}(-2C_1t-C_2)+t$; $z=2C_1e^{-t}+t-1$.

186. $x=e^{-4t}(A\cos t+B\sin t)+\frac{31}{26}e^t-\frac{93}{17}$; $y=e^{-4t}[(A-B)\sin t-(A+B)\cos t]-\frac{2}{13}e^t+\frac{6}{17}$. **187.** $y=C_1e^x+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{x\sqrt{23}}{2}+C_3+\sin\frac{x\sqrt{23}}{2}\right)+\frac{1}{4}e^{2x}$; $z=C_1e^x+\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4}\left[(-7C_2-\sqrt{23}C_3)\cos\frac{x\sqrt{23}}{2}+\right.$

$+(-7C_3+C_2\sqrt{23})\sin\frac{x\sqrt{23}}{2}\Big]-\frac{1}{8}e^{2x}$. **188.** $y=e^t\left(C_1+\frac{t}{2}\right)+e^{-t}\left(C_2-\frac{t}{2}\right)$, $x=e^t\left(C_1-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)+e^{-t}\left(-C_2+\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)$. **189.** $z=C_1x^2-\frac{C_2}{x}$, $y=(1-2C_1)\,x-\frac{C_2}{x^2}$. **190.** $t=e^\tau$; $x=C_1t^2+C_2t^{-2}-\frac{2}{3}t$, $y=\frac{1}{3}C_1t^3-C_2t^{-2}-\frac{1}{3}t$. **191.** $x=C_1t+C_2t^2+C_3t^{-1}$, $y=C_1t-C_2t^2+2C_3t^{-1}$, $z=2C_1t+3C_2t^2+C_3t^{-1}$. **192.** $x=\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}+e^{-4t}(C_1+C_2t)$, $y=\frac{1}{25}e^t+\frac{7}{36}e^{2t}-e^{4t}(C_1+C_2+C_2t)$. **193.** $\frac{z-x}{y-x}=C_1$; $(x-y)^2(x+y+z)=C_2$. **194.** $\frac{zy}{x}=C_1$; $x^2+y^2+z^2=C_2$. **195.** $xy=C_1$; $(x+y)(x+y+z)=C_2$. **196.** $x=\ln(C_1t+C_2)$, $y=\ln(C_1t+C_2)+C_3-C_2$; $z=(C_1+1)\,t+C_2$. **197.** Прямолинейные образующие поверхностей параллельны плоскости xOy и пересекают ось Oz (коноиды). Указанная задача Коши определяет гиперболический параболоид. **198.** Искомое частное решение: $f=y-z+2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{z}-\sqrt{y})$. **199.** Общее решение — поверхности вращения вокруг оси, проходящей через начало, с угловыми коэффициентами $\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=l:m:n$; характеристики — окружности с центрами на этой оси, лежащие в перпендикулярных к ней плоскостях. **200.** $\Phi\left((x-u)\,S^{\frac{1}{3}},\ (y-u)\,S^{\frac{1}{3}},\ (z-u)\,S^{\frac{1}{3}}\right)=0$, где $S=x+y+z+u$. **201.** $u=\frac{1}{2}x^2yz-\frac{1}{6}x^3(bz+cy)=\frac{1}{12}bcx^4+\varphi(y-bx,\ z-cx)$. **202.** $z=\frac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)$. **203.** $z=\sqrt{xy}$ (Гюнтер). **204.** Уравнение: $px+qy=\frac{1}{k}\sqrt{x^2+y^2}$; общее решение: $z=\frac{1}{k}\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; $k=$ тангенсу угла прямолинейных образующих с осью Oz, φ — произвольная функция (Гурса). **205.** $\frac{z-y}{xz}=C$. **206.** $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=C$. **207.** $\frac{(1-z^2)\,x+y}{z}=C$. **208.** Условие интегрируемости не выполнено. **209.** $x^2-y^2+z^2=\frac{1}{2}(x+y)$. **210.** Условие интегрируемости не выполнено. Приводя уравнение к виду $0=dx+y\,dy+z\,dz+z\,dy=d\left(x+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+z\,dy$, полагаем $x+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=\varphi(y)$ (φ — произвольная функция); тогда второе соотношение $z=-\varphi'(y)$. **211.** Полный интеграл $z=\frac{1}{2a}(x+ay)^2+b$; решение задачи Коши $z=xy+y\sqrt{x^2+1}$. **212.** $2\sqrt{1+az}+\ln\frac{\sqrt{1+az}-1}{\sqrt{1+az}+1}=x+ay+b$. **213.** Замена переменных $z=\zeta^2$, $x=\frac{1}{\xi}$, $y=\frac{1}{\eta}$, или непосредственно — вспомогательное уравнение $p=\frac{a}{x}+\frac{\ln x}{x}$. **214.** $z=x-y+2\sqrt{axy}+b$. **215.** $z^2=\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{\sin^2\alpha}+\beta$. **216.** $z=\frac{x^2}{4}+xy+y^2$; $z=-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}$. **217.** $x^2+y^2+z^2=1$. **218.** $2z=$

$= x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2+a} + y\sqrt{y^2-a-1} + a\ln(x+\sqrt{x^2+a}) - (a+1)\ln(y + \sqrt{y^2-a-1}) + b$. **219.** $\sqrt{a^2-2a-x-z} + (a-1)\ln(\sqrt{a^2-2a-x-z} - a + 1) + \frac{x}{2} + ay = b$. **220.** 1) $z = xy$; 2) $x = \frac{u}{2}(e^t+1)$, $y = u^2(2e^t-1)$; $z = u^3e^{2t}$; $t_0 = 0$. **221.** $x = \cos u + t\cos\left(u+\frac{\pi}{6}\right)$; $y = \sin u + t\sin\left(u+\frac{\pi}{6}\right)$; $z = \frac{1}{2}u + t$; $t_0 = 0$. **222.** $x = -3u^2 + (3u^2+1)\tau$; $y = \frac{2u^3}{3u^2+1} + \frac{u^3+u}{3u+1}\tau$; $z = \frac{6u^5}{3u^2+1} + \frac{-3u^5+u^3}{3u^2+1}\tau$; $\tau_0 = 1$. **223.** Уравнение Монжа $dz^2 = dx^2 + dy^2$, его решение $x = -\omega'(\alpha)\sin\alpha - \omega''\cos\alpha$, $y = -\omega'\cos\alpha + \omega''\sin\alpha$, $z = \omega + \omega''$. **224.** Соответствующее уравнение в частных производных $pq = 1$; $x = -\frac{1}{2}a\omega'' - \omega'$, $y = -\frac{1}{2}a^3\omega''$, $z = -a^2\omega'' - a\omega' + \omega$. **225.** Уравнение $dz^2 = 4z\,dx\,dy$, решение $z = -a - \frac{2\omega'}{\omega''}$, $y = -\omega + 2\frac{\omega'^2}{\omega''}$, $z = -4\frac{\omega'^3}{\omega''^2}$.

226. $q = \frac{h'_{y_0} + h'_{z_0}q_0}{g'_{y_0} + g'_{z_0}q_0}$; $p = \frac{g'_x h'_{y_0} - h'_x g'_{y_0} + q_0(g'_x h'_{z_0} - h'_x g'_{z_0})}{g'_{y_0} + g'_{z_0}q_0}$.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

[1]) Д. у. — дифференциальное уравнение.

ОГЛАВЛЕНИЕ